

# Modélisation du Climat et Statistiques (3/3)

## Systemes dynamiques

Pascal Yiou

LSCE, Gif-sur-Yvette

# Quelles questions?

En faisant l'hypothèse que les observations viennent d'un système physique (*dont on ne connaît pas forcément les équations*), par exemple:

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t)$$

- Que peut-on apprendre sur  $F$  à partir d'une série d'observations de  $X$ ?
- Que peut-on apprendre sur toutes les trajectoires  $X(t)$  à partir de  $F$ ?
- Les observations  $X(t)$  sont-elles différentes d'un processus aléatoire?
- Peut-on faire des prévisions sur le système?

# Ce cours

- Explorer les propriétés qualitatives des « solutions » des systèmes dynamiques
  - Équilibres
  - Bifurcations
  - Oscillations, chaos, etc.
- Un exemple d'oscillations à partir d'un modèle d'interaction glace -- climat.

# Ce que ce cours n'est pas...

- Un traité sur la théorie systèmes dynamiques
- Si la plupart des énoncés sont vrais, ils ne sont pas prouvés dans ce cours

# Rappel sur les systèmes dynamiques

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t), \text{ et } X(0) = X_0 \quad (\in \mathbf{R}^n) \quad (\text{SD})$$

Un système dynamique est l'application:

$$X_0 \mapsto \varphi_t(X_0), (t \geq 0)$$

qui, à une condition initiale  $X_0$ , fait correspondre une trajectoire  $\varphi_t$  qui vérifie l'équation différentielle (SD).

On s'intéresse au **comportement temporel** des systèmes dynamiques *bornés* (i.e. dont les trajectoires *n'explorent* pas et sont bornées).

# Quelques illustrations

Point fixe  $X_f$  (équilibre):

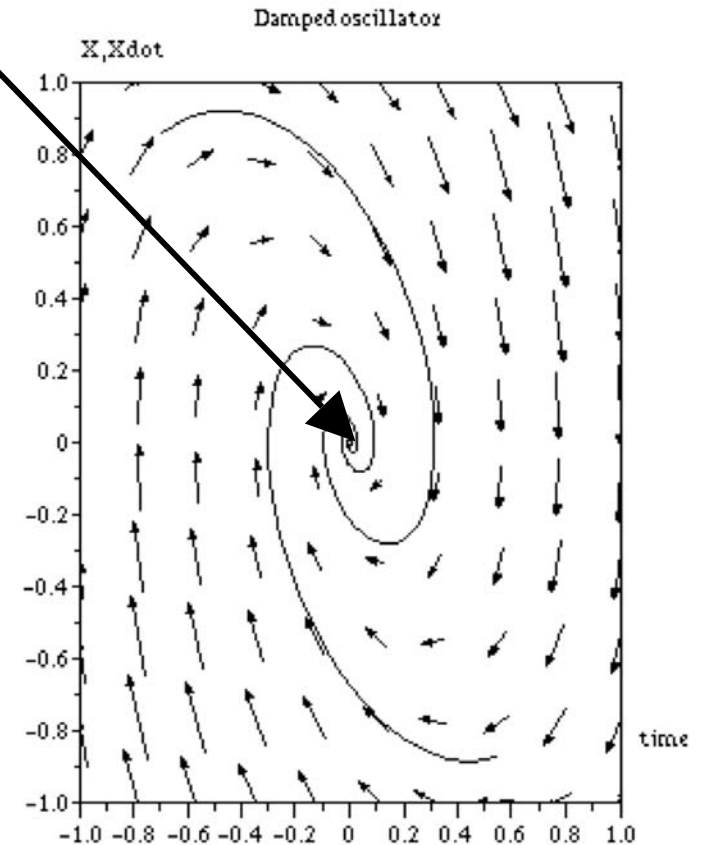
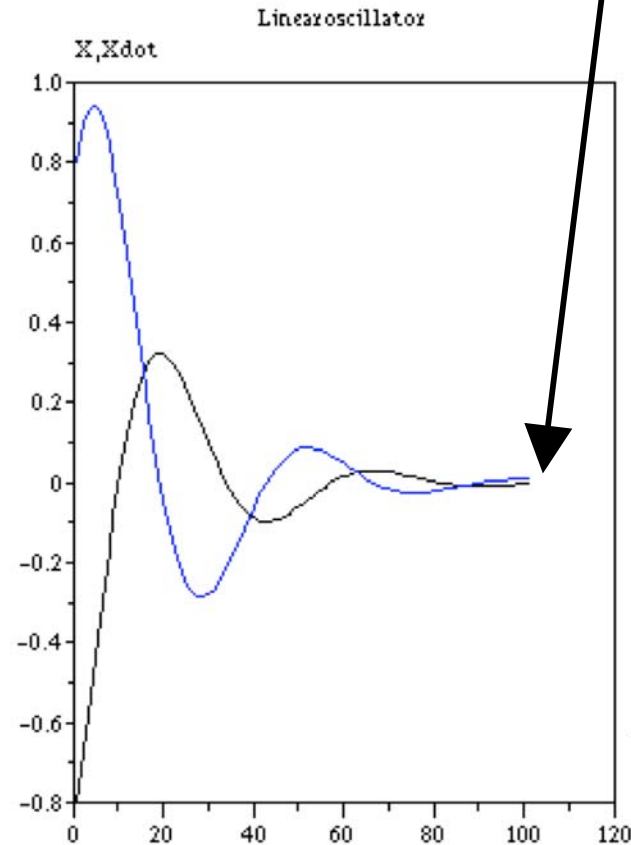
$$X_f = \varphi_t(X_f), \forall t$$

Oscillateur amorti:

$$\ddot{X} + k\dot{X} + \omega^2 X = 0$$

$$\begin{cases} x = X, \\ y = \dot{X}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ky - \omega^2 x. \end{cases}$$

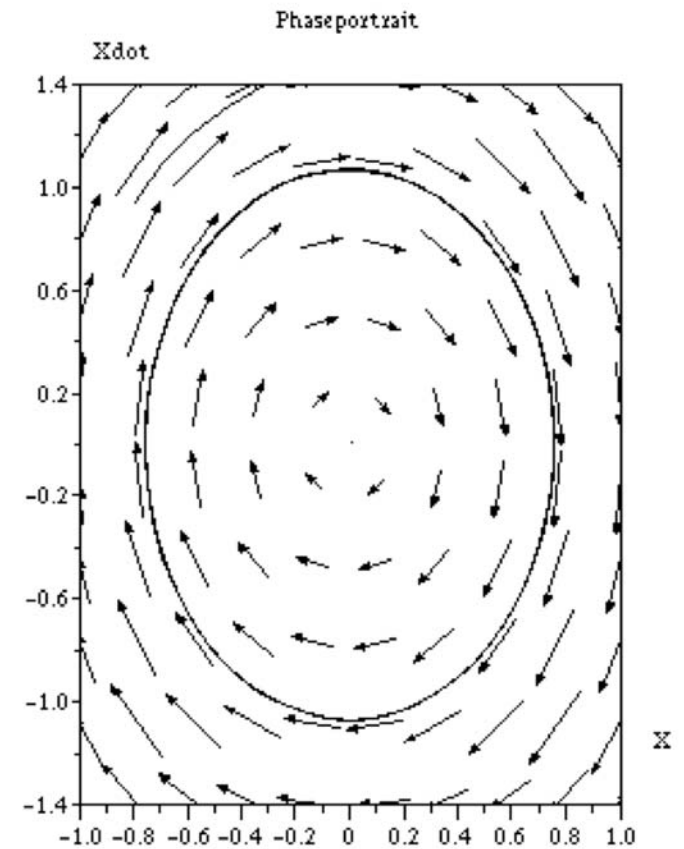
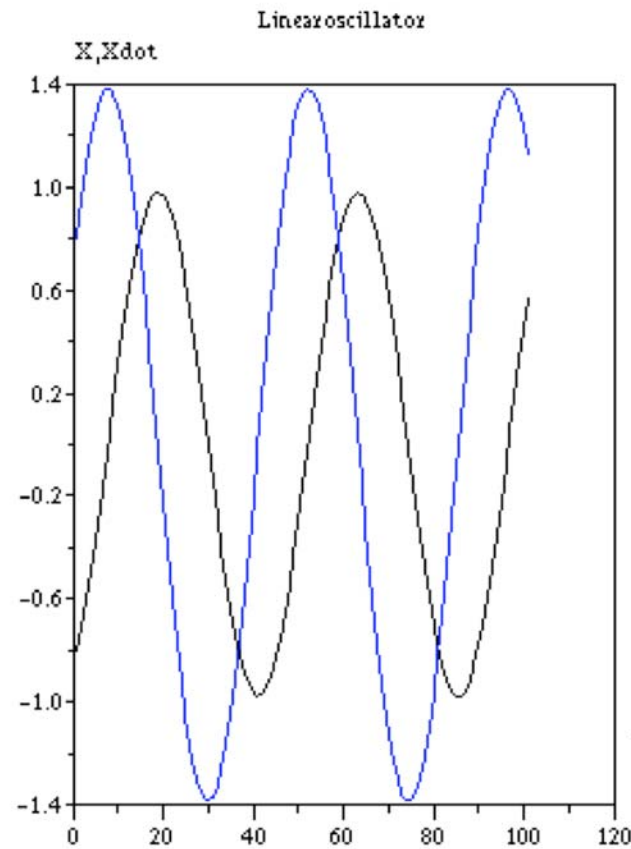


## Trajectoire périodique:

$$X_t = \varphi_t(X_0) = \varphi_{t+T}(X_0), \forall t$$

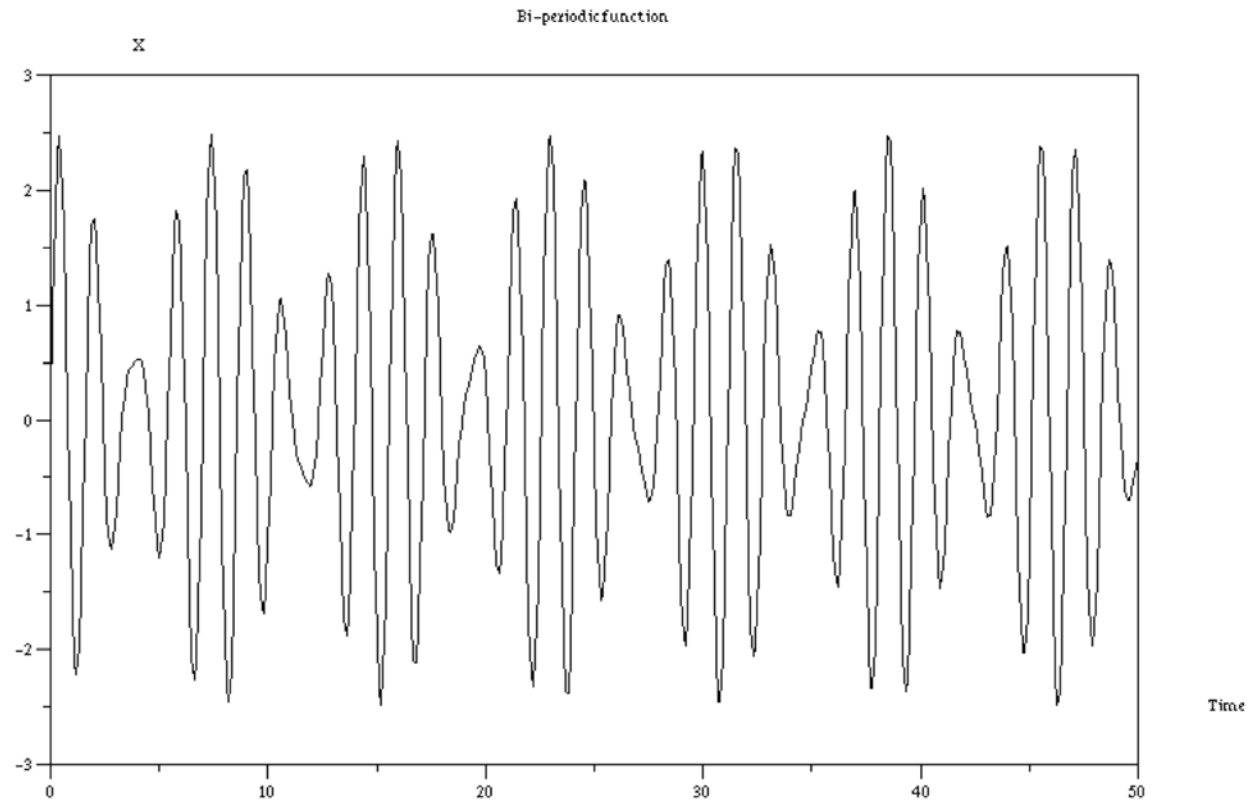
Oscillateur linéaire:

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0$$



## Système pseudo-périodique:

$$X(t) = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t, \text{ et } \frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbf{Q}$$

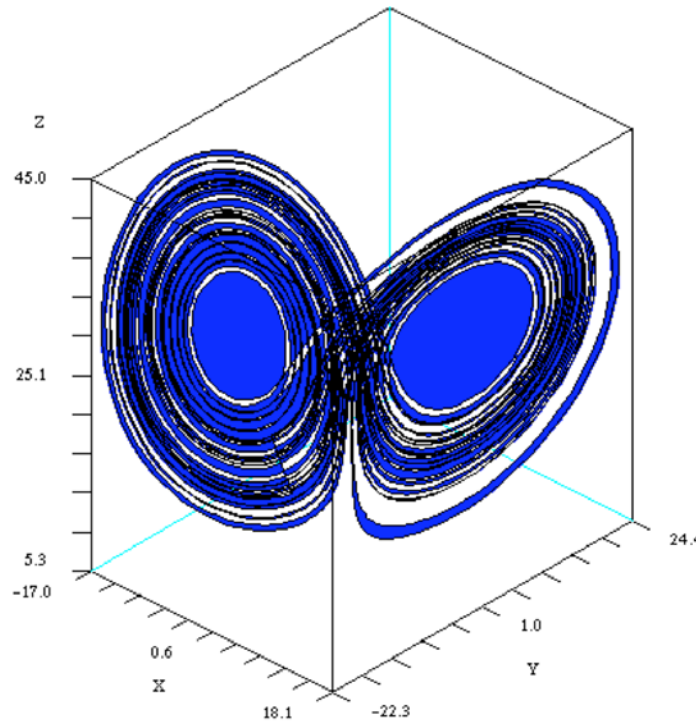
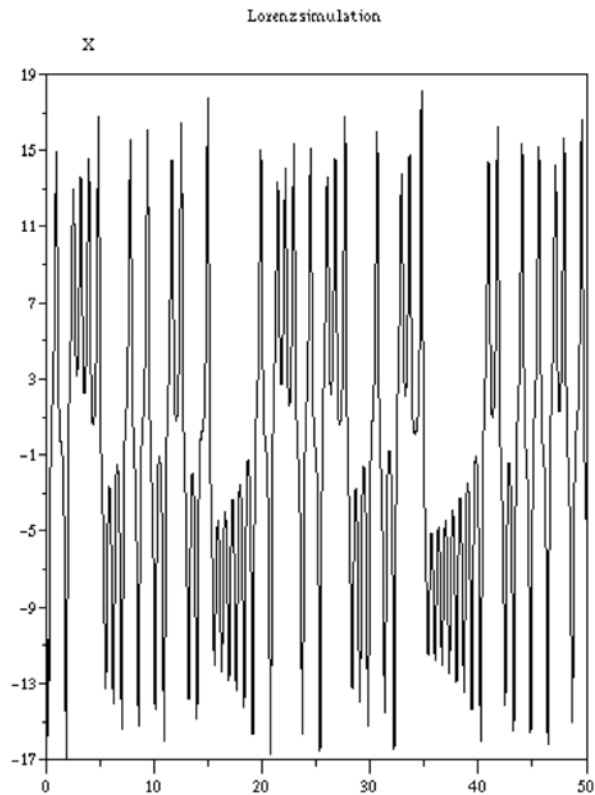


# Et après?

# Le chaos..

Exemple classique:  
le système de Lorenz (1963)

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = -\beta z + xy. \end{cases} \quad \sigma, \beta, \rho \geq 0,$$



*Attracteur  
« étrange »*

# Points fixes (ou équilibres)

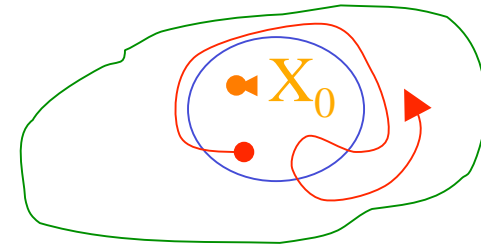
$$X_0, \text{ tel que } \frac{dX_0}{dt} = F(X_0) = 0$$
$$\Rightarrow \varphi_t(X_0) = X_0, \forall t$$

## Les questions:

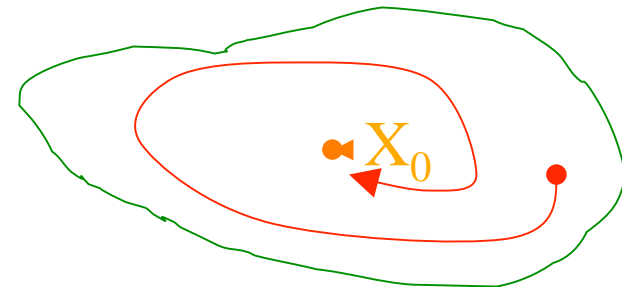
- Stabilité de l'équilibre  $X_0$ :
  - une perturbation autour de cet équilibre « diverge » -t-elle?
  - Un changement de paramètre du système change-t-il les propriétés de l'équilibre?
- Unicité de l'équilibre? (existence d'équilibres multiples)

# Stabilité des équilibres

- Stabilité de Lyapounov: Si on part de « près », on reste dans le voisinage




- Stabilité asymptotique: Si on part de « près », on converge vers le point fixe



# Linéarisation et stabilité asymptotique

$$\left. \begin{array}{l} X = X_0 + Y \\ \frac{dY}{dt} = DF(X_0) \cdot Y + O(Y^2) \end{array} \right\} \text{linéarisation du système près de l'équilibre}$$

Matrice *Jacobienne* de F:  $\frac{\partial F}{\partial X}$



Dans le voisinage de  $Y=0$ , une solution du système pour une condition initiale  $Y_0$  est:

$$Y(t) = \exp[DF(X_0)t]Y_0$$

La stabilité asymptotique est donc liée aux valeurs propres de  $DF(X_0)$ .

# Stabilité asymptotique

**Th:** l'équilibre  $X_0$  est asymptotiquement stable si

$$\Re(\text{vap}(DF(X_0))) < 0$$

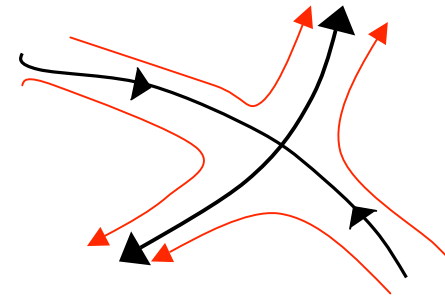
La première chose à faire après avoir localisé un point fixe est de déterminer les valeurs propres du système linéarisé.

# Un bestiaire de points fixes

Point fixe hyperbolique:  $\Re(\text{vap}(DF(X_0))) \neq 0$

Selle: point fixe hyperbolique tel que:

$$\Re(\text{vap}(DF(X_0))) > 0 \text{ et } < 0$$



Puits:  $\Re(\text{vap}(DF(X_0))) < 0$

Source:  $\Re(\text{vap}(DF(X_0))) > 0$

Centre: point fixe non hyperbolique  $\exists \Re(\text{vap}(DF(X_0))) = 0$

# Bifurcations de points fixes

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \mu)$$

**Question:** comment changent les propriétés de stabilité d'un point fixe quand un paramètre  $\mu$  de l'équation change?

Une *bifurcation* est un changement de propriété de point fixe.

**Exemple:** 
$$\frac{dX}{dt} = \mu - X^2$$

# Exemple de bifurcation

$$X_0 = \pm\sqrt{\mu}, \text{ si } \mu \geq 0 \quad \text{Pas de PF si } \mu < 0$$

$$DF(X) = -2X$$

$$DF(X_0) = \pm 2\sqrt{\mu} \quad \begin{array}{l} \text{1 PF asymptotiquement stable,} \\ \text{1 PF instable} \end{array}$$

Donc:

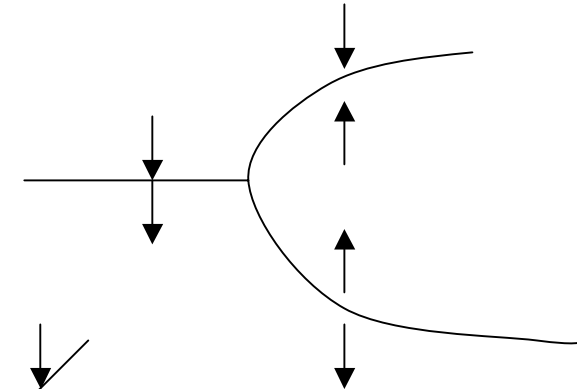
- Si  $\mu < 0$ : pas de PF
- Si  $\mu = 0$ : un seul point fixe ( $X_0 = 0$ )
- Si  $\mu > 0$ : deux point fixes

# Un bestiaire de bifurcations

Bifurcation nœud/selle:

0 FP  $\rightarrow$  2 FPs (1 stable, 1 instable)

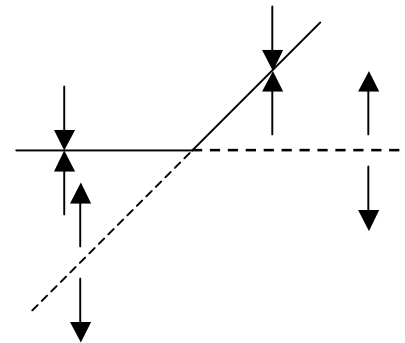
$$\dot{X} = \mu - X^2$$



Bifurcation transcritique:

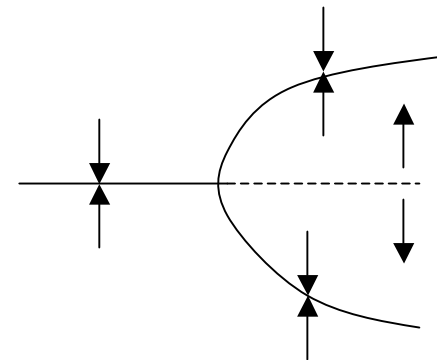
Échange de stabilité

$$\dot{X} = \mu X - X^2$$



Bifurcation en fourche:

$$\dot{X} = \mu X - X^3$$



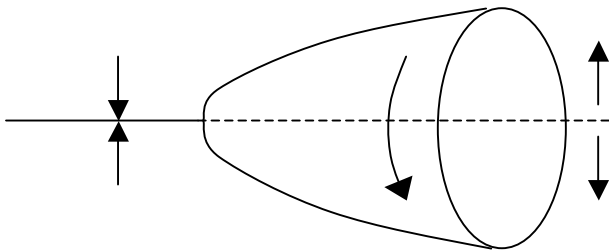
# Bestiaire, suite

## Bifurcation de Hopf:

Un système à deux variables (plan XY) peut se mettre sous forme polaire  $(r, \theta)$ :

$$\begin{cases} \dot{r} = d\mu r + ar^3 \\ \dot{\theta} = \omega + c\mu + br^2 \end{cases}$$

1 point fixe ( $r \rightarrow 0$ ) vers 1 orbite périodique ( $r \rightarrow r_0$ ) et un point fixe instable



# Quelques remarques sur les bifurcations

- Nécessité d'avoir un système nonlinéaire
- La transition d'un système à l'équilibre vers un système oscillant (et périodique) se fait par une bifurcation de Hopf
- Les seules bifurcations « structurellement » stables sont les bifurcations nœud/selle et de Hopf.
- En 2d, les systèmes continus les plus complexes sont des orbites périodiques

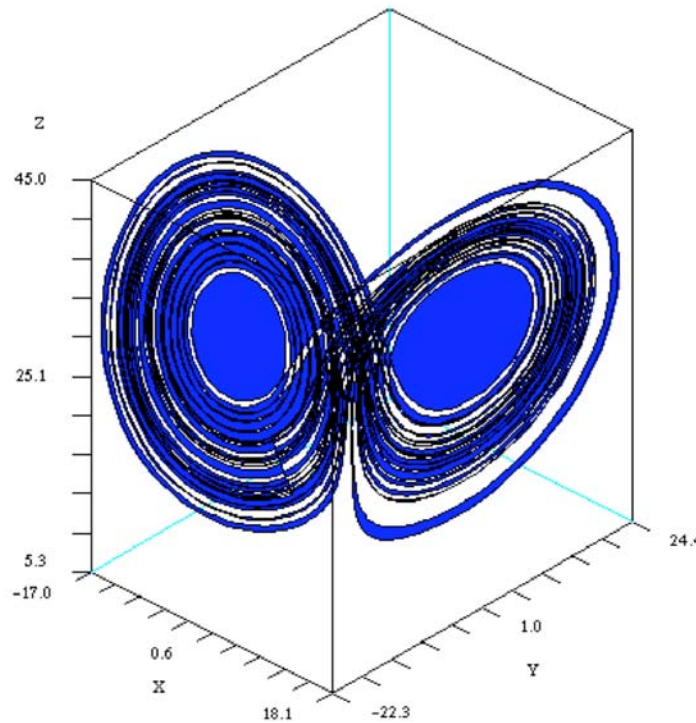
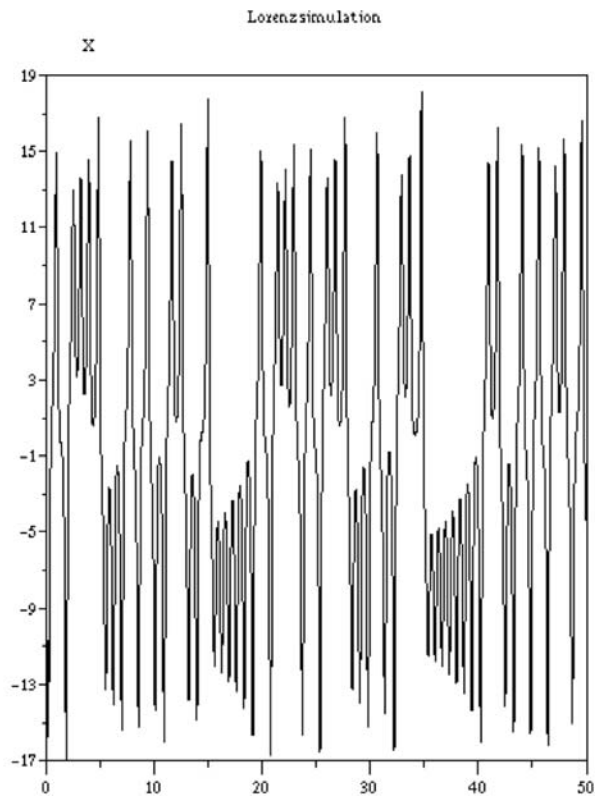
# Quelques nouvelles notions

- Points fixes stables et cycles sont des *attracteurs*: des ensembles asymptotiquement visités par les trajectoires du système
- Ils vivent sur des « surfaces » de dimensions 0 (points) ou 1 (cycles), ou plus (juxtaposition de cycles: tore)
- Certains attracteurs ont des formes plus complexes...

# Les systèmes chaotiques

Exemple classique:  
le système de Lorenz (1963)

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = -\beta z + xy. \end{cases} \quad \sigma, \beta, \rho \geq 0,$$



*Attracteur  
« étrange »*

# Le système de Lorenz

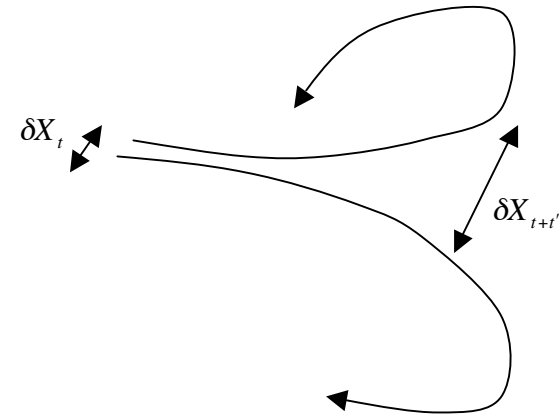
- Issu de la convection de Rayleigh-Bénard
- Pour les valeurs de paramètres « habituelles »:
  - trois points fixes instables
  - Toutes les trajectoires sont « entrantes » dans une sphère suffisamment grande (attracteur universel)
  - L'attracteur est *étrange*, i.e., l'ensemble limite des trajectoires a une dimension fractionnaire (e.g. ensemble de Cantor).
  - Le système est chaotique

# Une définition du chaos

*La forte sensibilité aux conditions initiales*

Exposants de Lyapounov: taux de divergence des trajectoires dans chacune des directions

Un système dynamique est chaotique si un de ses exposants de Lyapounov est positif



# Exemple de système chaotique (1)

Par exemple, un système dynamique discret:

$$X_{n+1} = f(X_n)$$

$$\tilde{X}_0 = X_0 + \delta X_0$$

$$\tilde{X}_1 = X_1 + \delta X_1 = f(X_0 + \delta X_0) \approx f(X_0) + f'(X_0)\delta X_0$$

$$\Rightarrow \delta X_1 = \tilde{X}_1 - \tilde{X}_0 = f'(X_0)\delta X_0$$

$$\delta X_n = \prod_{m=0}^{n-1} f'(X_m) \delta X_0 : \text{taux de divergence au bout de } n \text{ itérations}$$

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\delta X_n}{\delta X_0} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{m=0}^{n-1} |f'(X_m)| \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{donc} \quad \delta X_n \sim \gamma^n \delta X_0$$

$$\lambda = \log(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \log(|f'(X_m)|) : \text{exposant de Lyapounov}$$

# Exemple de système chaotique (2)

- Le calcul précédent se généralise en plusieurs dimensions et pour les systèmes continus
- Un système dynamique est chaotique quand le plus grand exposant de Lyapounov est positif: les trajectoires divergent exponentiellement vite
- Si l'attracteur est borné, la divergence locale exponentielle implique le repliement incessant des trajectoires et donc le feuilletage *fractal* de l'attracteur (i.e. une dimension non entière, cf ensemble de Cantor).

# Exemple de système chaotique (3)

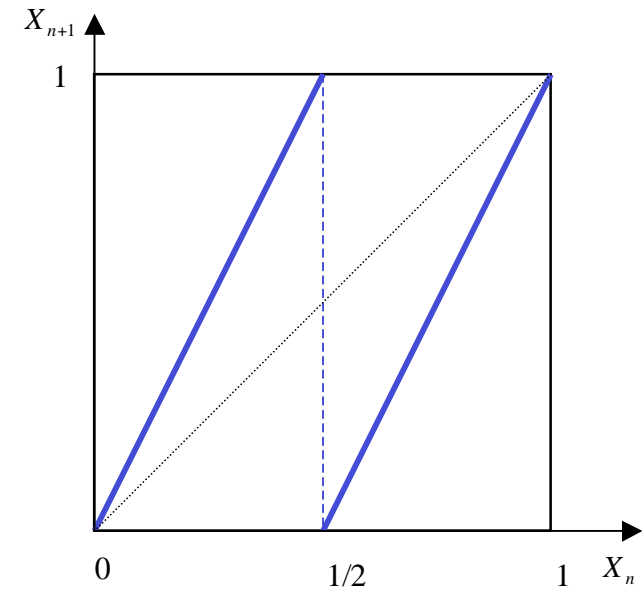
Exemple « élémentaire »:

$$X_{n+1} = 2X_n \pmod{1}$$

$\lambda = \log(2) > 0$ , car  $f' = 2$  C'est chaotique!

$$X_n = 0.a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}, a_i = 0 \text{ ou } 1$$

$$X_{n+1} = f(X_n) = 0.a_2 a_3 \dots a_k \dots = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$$



**Le chaos est le caractère imprévisible de la représentation des nombres irrationnels!**

# En pratique

Il y a des algorithmes pour estimer les exposants de Lyapounov ou la dimension fractale à partir d'observations, basés sur un théorème de Takens (1981).

On observe un système dynamique (dont on ne connaît pas forcément les équations) ayant un attracteur:

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t), \text{ et } X(0) = X_0 \quad (\in \mathbf{R}^n) \quad (\text{SD})$$

Sur une seule trajectoire, à intervalles discrets:  $\{X_n, n \geq 0\}$

Il est possible reconstruire un attracteur vivant sur une surface (*ou variété*) de dimension  $D$ , avec une suite d'observables en dimension  $2D+1$ .

# Méthode des retards

La technique consiste à « plonger » une suite  $\{X_n\}$  dans un espace de dimension *ad hoc* par la technique des retards:

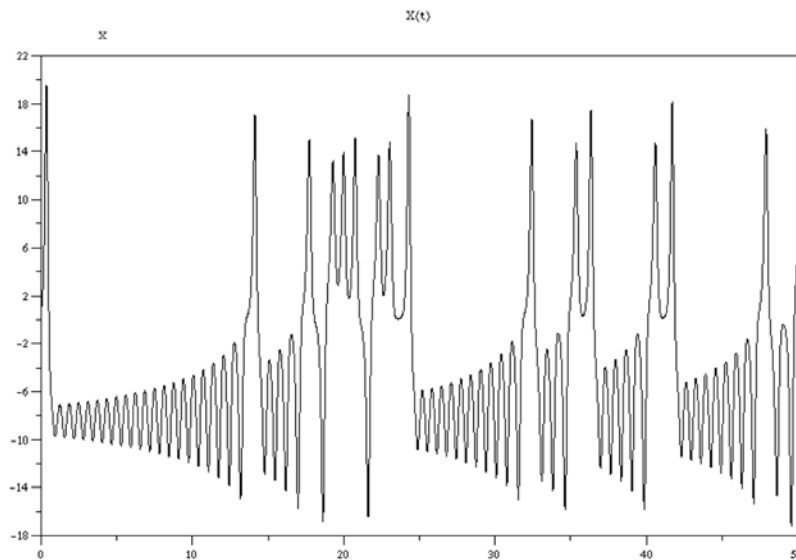
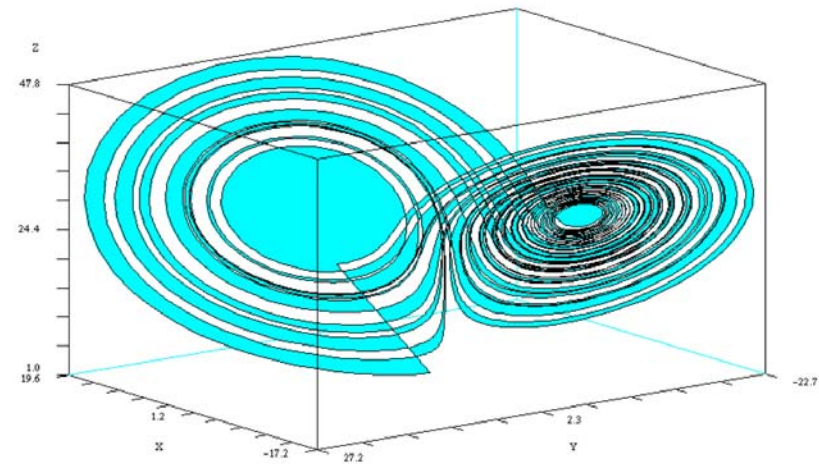
$$P : \{X_n, n \geq 0\} \mapsto \{\mathbf{Y}_n = (X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+M}), n \geq 0\}$$

Avec un choix « judicieux » de la dimension  $M$ , on peut reconstruire l'attracteur du système dynamique  $F$  à partir d'une seule trajectoire.

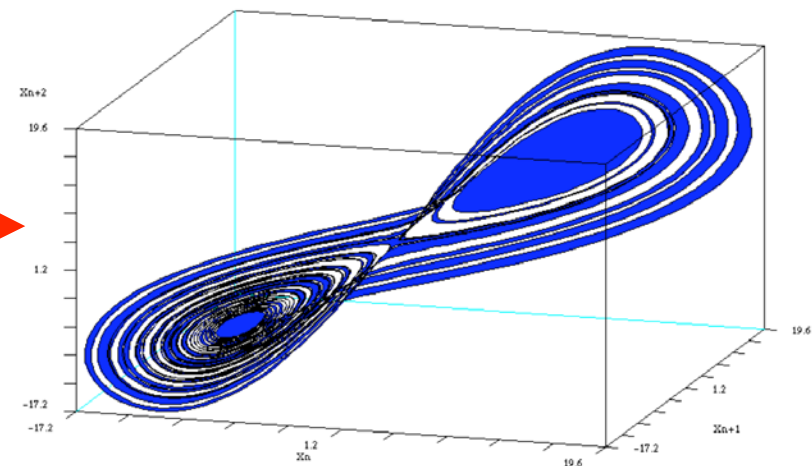
# Exemple: système de Lorenz

On ne dispose que d'une  
variable:

$$X(n\delta t), n \geq 0$$



Reconstruction  $(X_n, X_{n+1}, X_{n+2})$



# Morale

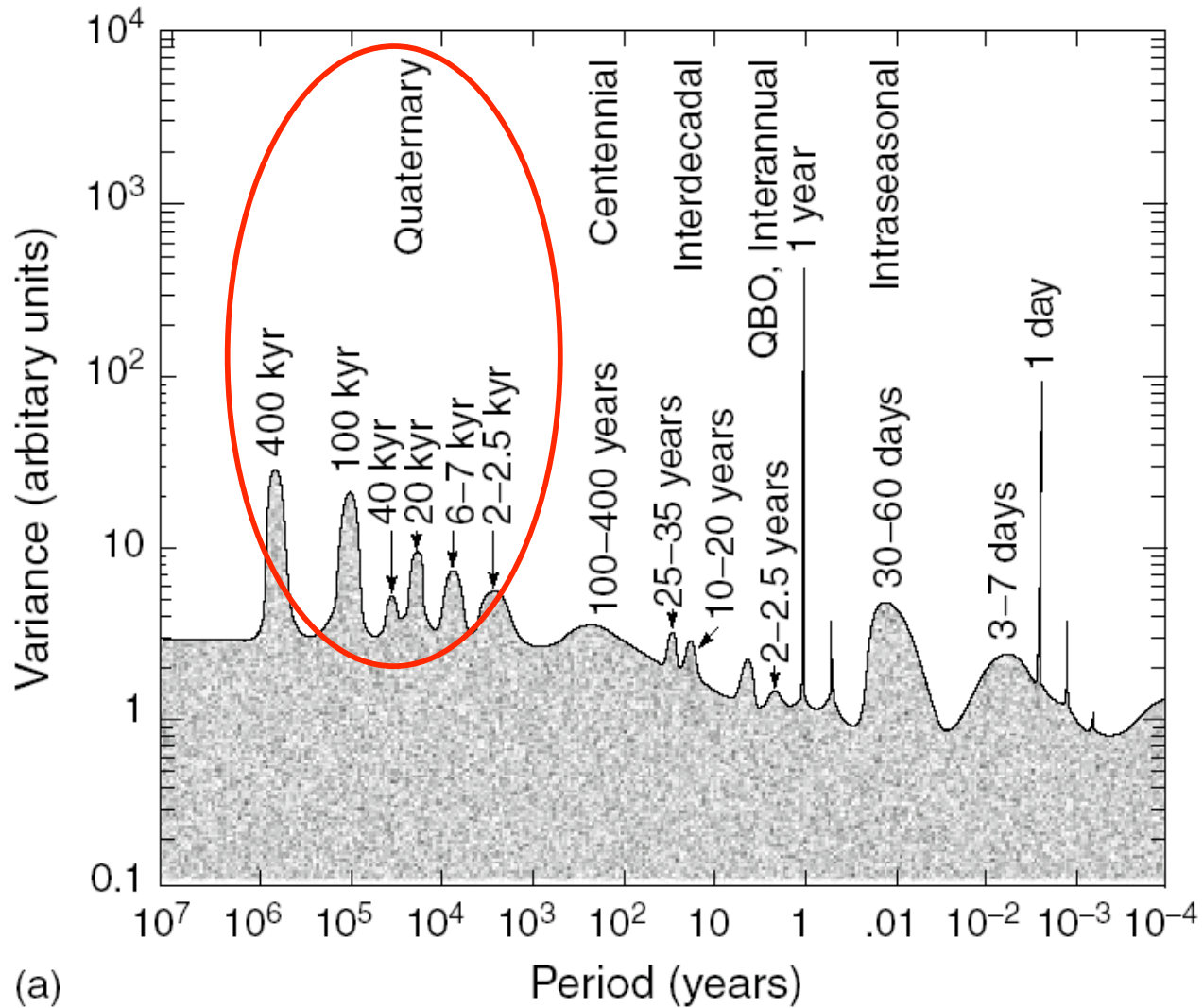
- En pratique, les algorithmes pour calculer une dimension fractale ou un plus grand exposant de Lyapounov demandent plus d'observations qu'on n'en disposera jamais en climatologie ou en sciences atmosphériques, pour une estimation sûre.
- Le chaos d'un système ou le caractère fractal d'un attracteur ne peuvent pas être « prouvés » à partir d'observations (il faut de l'ordre de  $N=42^D$  observations pour bien approcher un objet vivant en  $D$  dimensions).
- *Il faut donc réduire nos ambitions de décrire la variabilité observée d'un système à l'étude des points fixes et des composantes cycliques...*

# Morale (2)

- Un certain nombre de concepts (plongement) seront quand même exploités pour étudier la variabilité temporelle de systèmes observés
- La plupart des systèmes « climatologiques » ont des composantes quasi-périodiques qui justifient une description dynamique et une étude statistique

# Exemple *paléoclimatique*

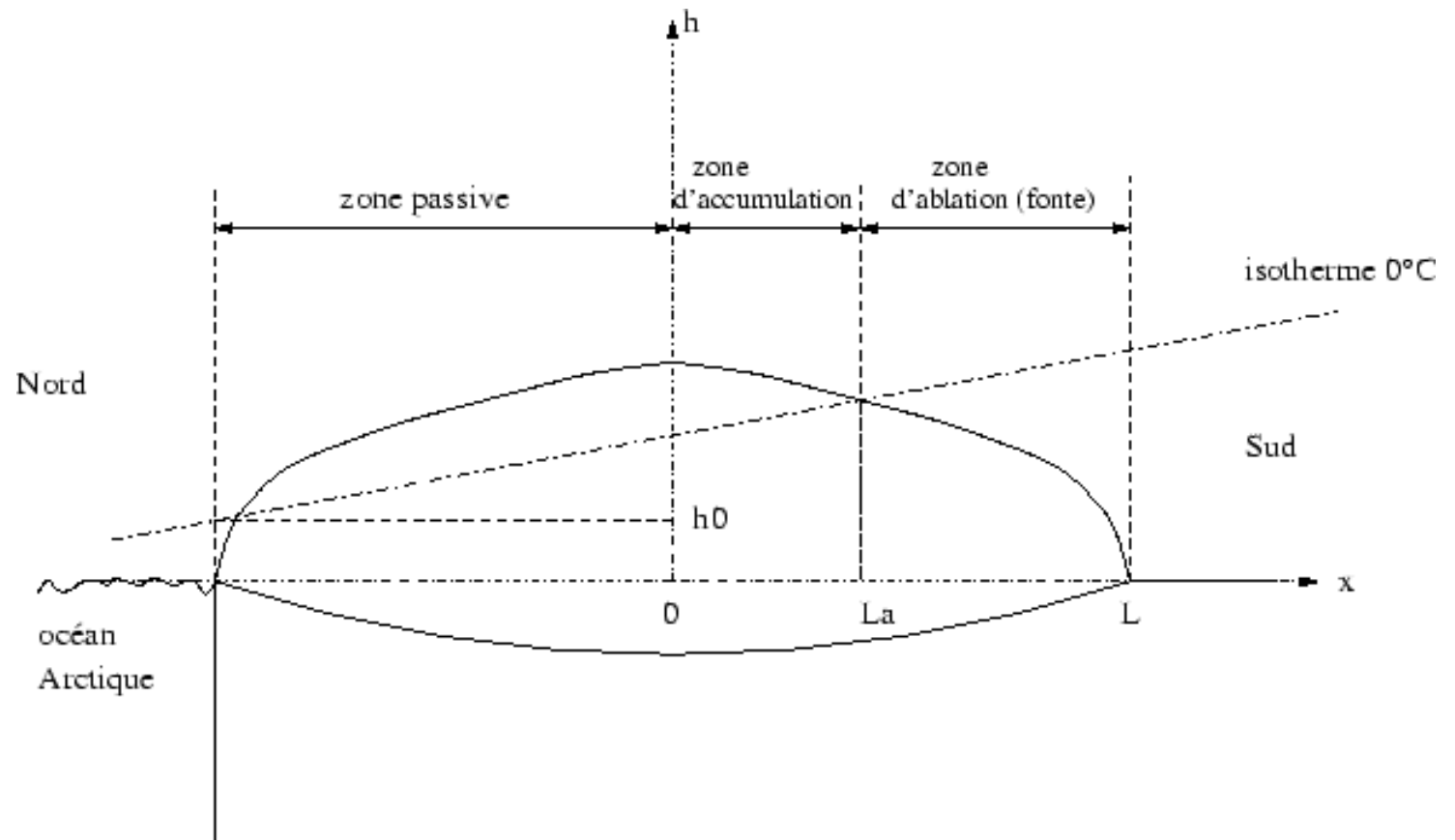
Composite spectrum of climate variability



(d'après Ghil, 2002)

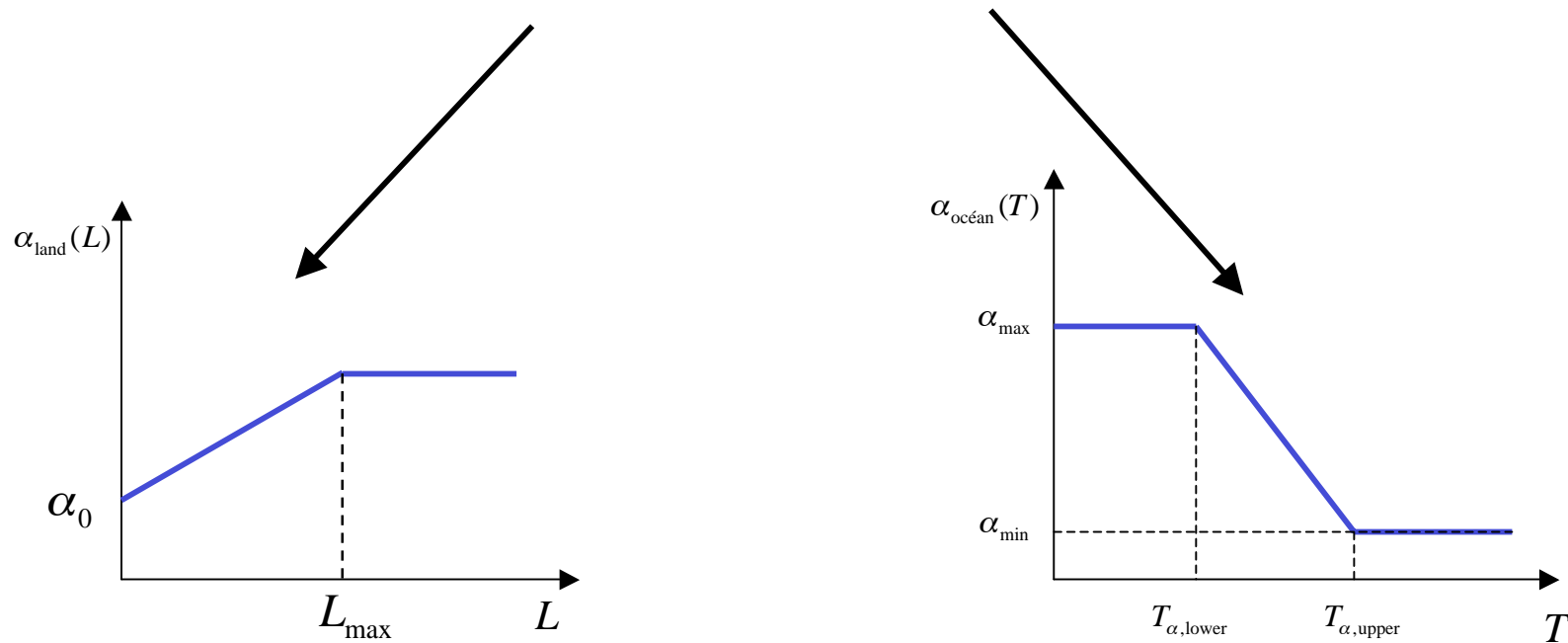
# Exemple oscillatoire

Modèle de calotte de glace de Ghil et Le Treut (1981).



## Conservation de l'énergie:

$$C_T \frac{dT}{dt} = R_i - R_o,$$
$$= Q \left( 1 - \left[ \gamma \alpha_{\text{land}}(L) + (1 - \gamma) \alpha_{\text{océan}}(T) \right] \right) - \kappa (T - T_\kappa).$$



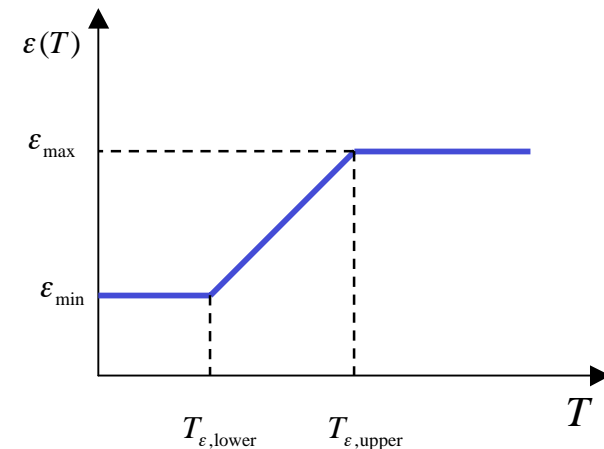
(albédo de la glace de mer)

Conservation de la masse:

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho (aL_a - a' L_{a'})$$

Pour un profil de calotte parabolique constant,  $V$  est fonction de l'extension  $L$ .

$$\frac{dL}{dt} = \mu \sqrt{\frac{L_{\max}}{L}} \left[ (1 + \underbrace{\varepsilon(T)}_{=a/a'}) L_a(T, L) - L \right]$$



# Oscillations glaciaires

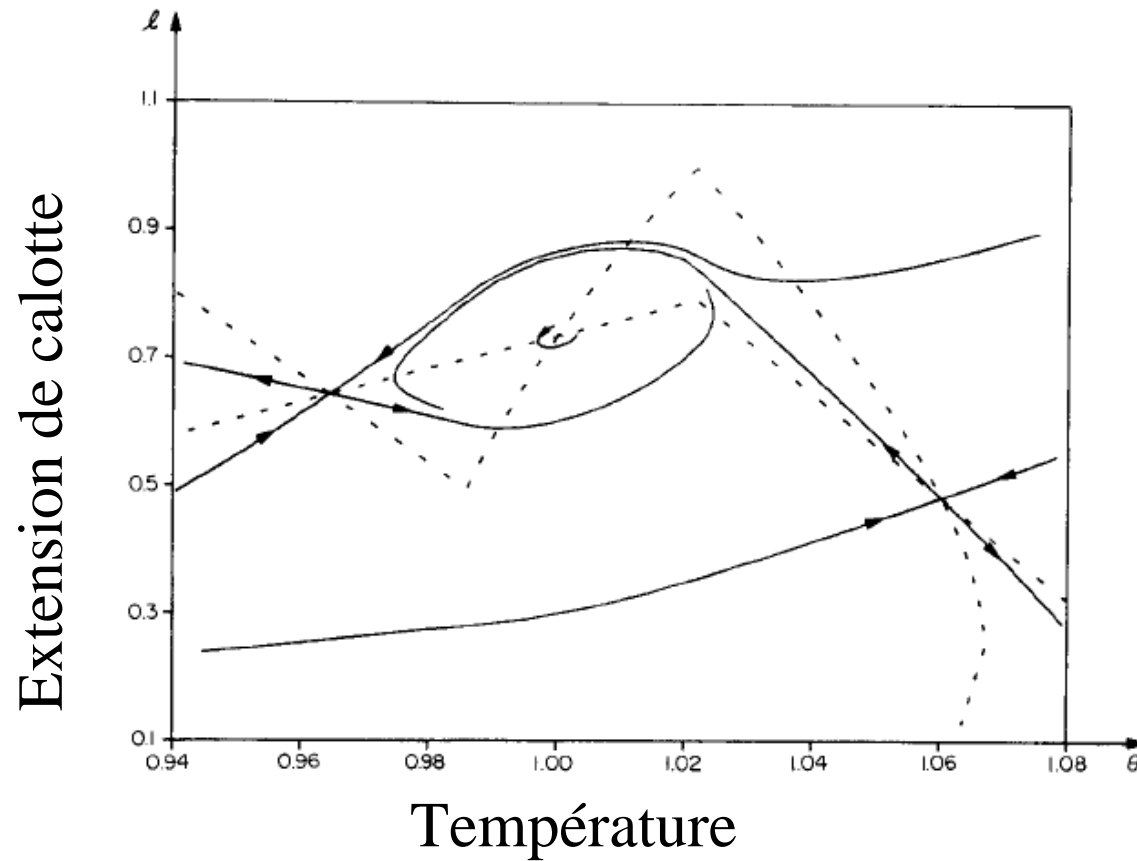
$$\begin{cases} C_T \frac{dT}{dt} = Q(1 - [\gamma \alpha_{\text{land}}(L) + (1 - \gamma) \alpha_{\text{océan}}(T)]) - \kappa(T - T_\kappa), \\ \frac{dL}{dt} = \mu \sqrt{\frac{L_{\text{max}}}{L}} [(1 + \varepsilon(T)) L_a(T, L) - L]. \end{cases}$$

« A la main » :

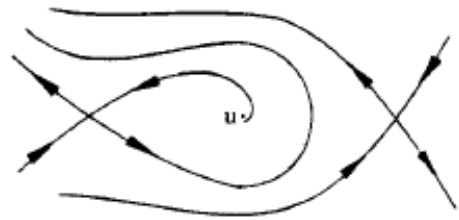
$$\left. \begin{array}{l} \frac{dT}{dt} \propto -L \\ \frac{dL}{dt} \propto T \end{array} \right\} \rightarrow \ddot{T} \propto -T : \text{oscillations!}$$

➔ Cycle limite nonlinéaire après bifurcations de Hopf sur  $\mu$ .

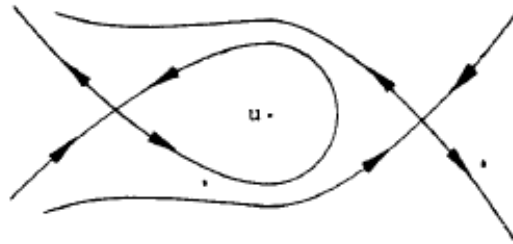
# Portrait de phase du modèle GLT



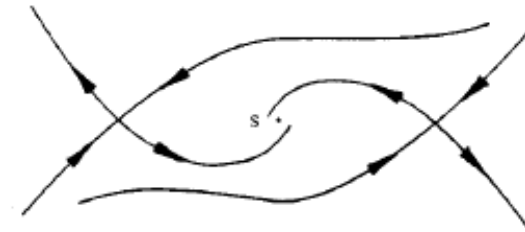
# Bifurcations (Hopf)



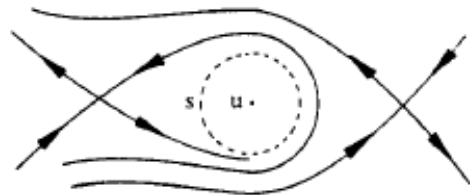
(a)  $\mu < 1.5790 \dots$



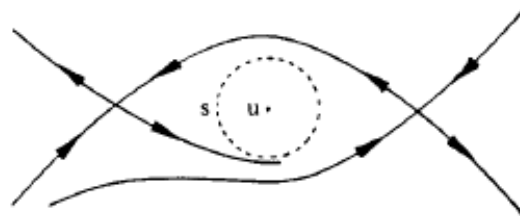
(b)  $\mu = 1.5790 \dots$



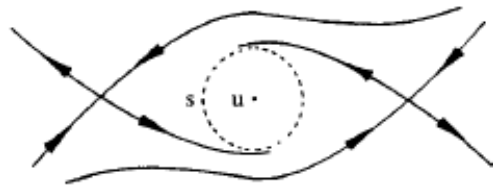
(g)  $1.76735 \dots < \mu$



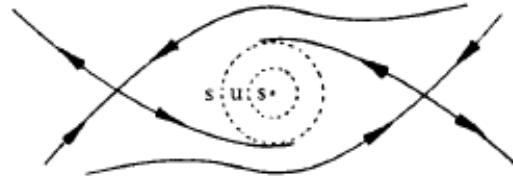
(c)  $1.5790 \dots < \mu < 1.6207 \dots$



(d)  $\mu = 1.6207 \dots$

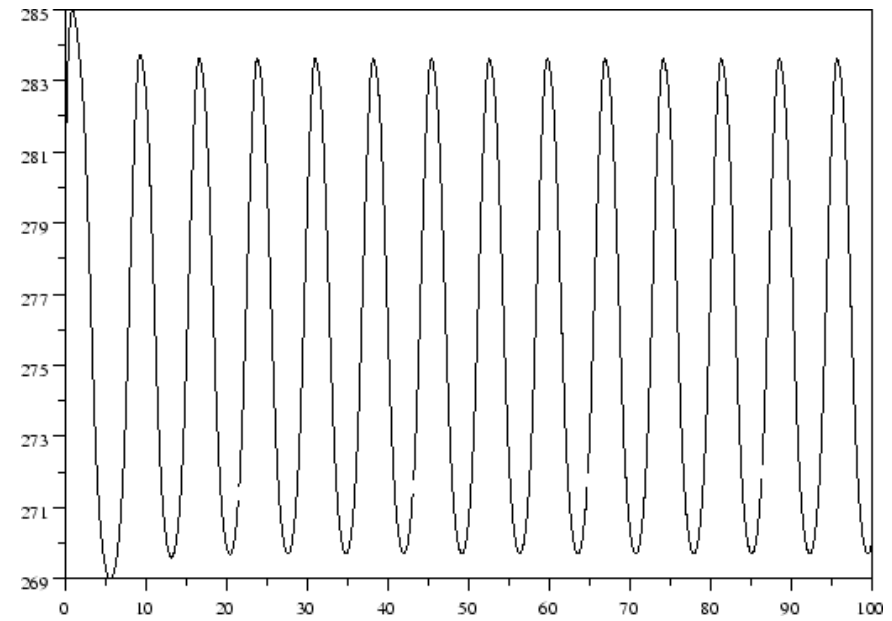
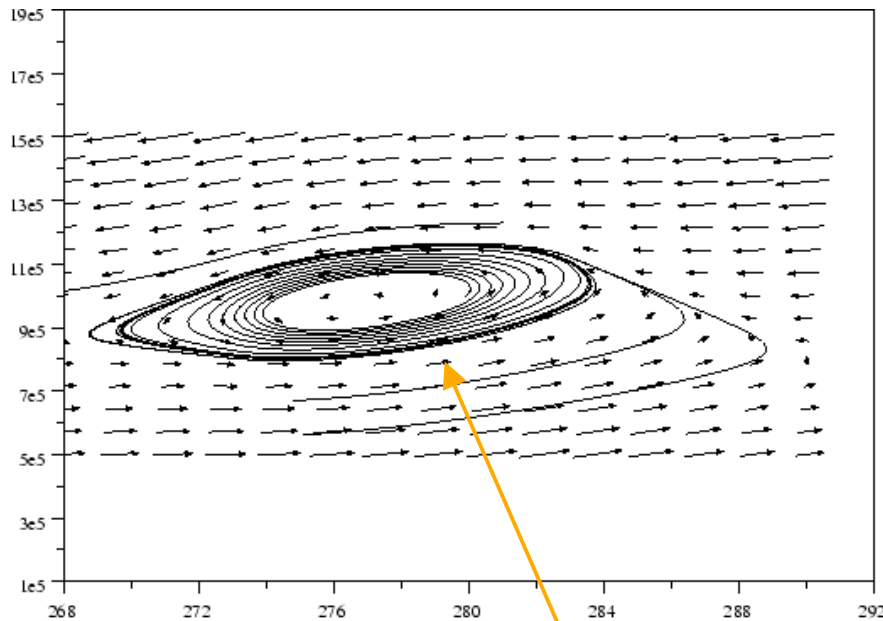


(e)  $1.6207 \dots < \mu < 1.7583 \dots$



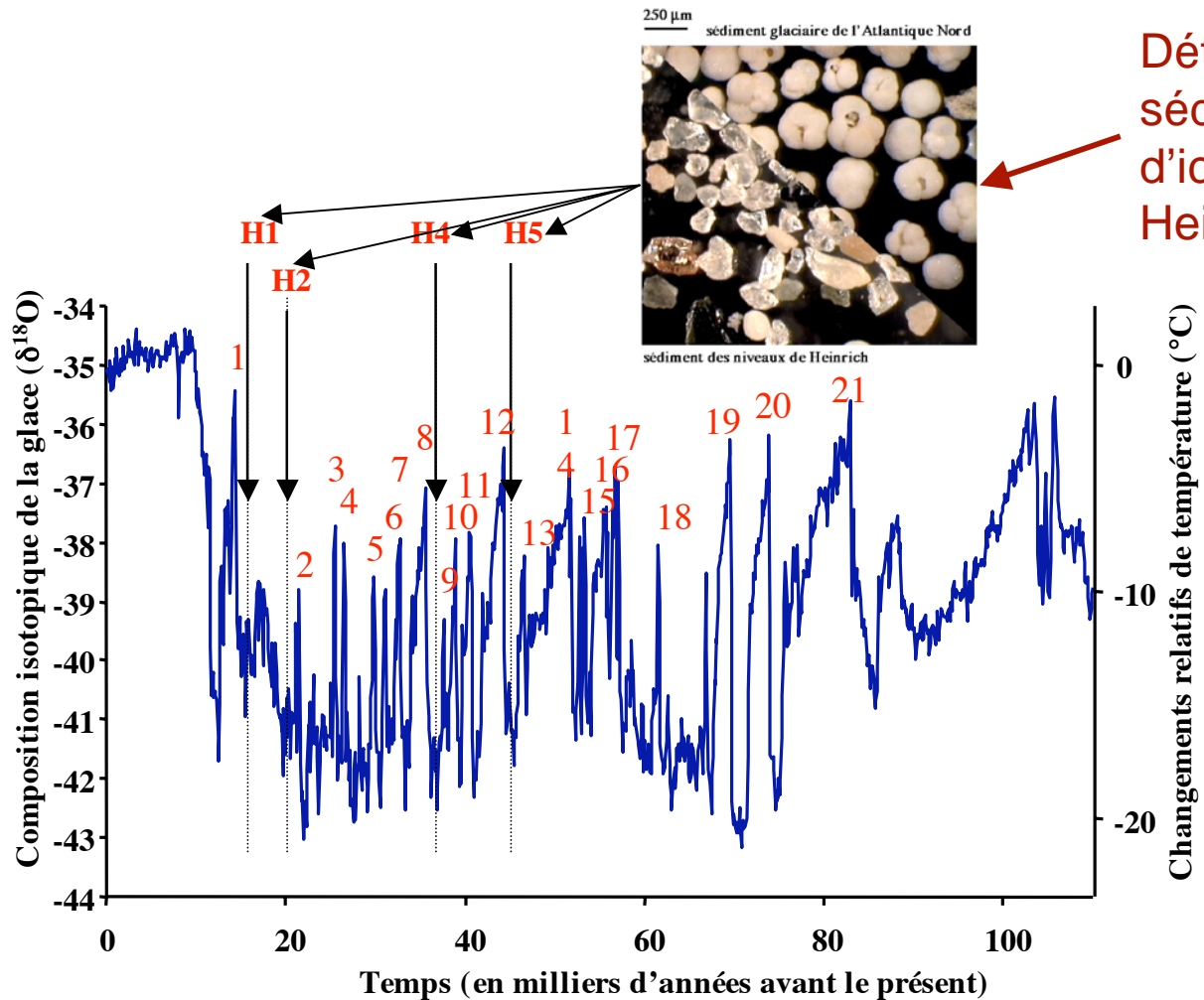
(f)  $1.7583 \dots < \mu < 1.76735 \dots$

# Simulations GLT



Période typique du **cycle** autour de 7000 ans: proche de celle des événements de Heinrich pendant le dernier âge glaciaire!

# Enregistrement de GRIP



Détritiques dans les sédiments marins: débâcles d'icebergs et événements de Heinrich

Enregistrement isotopique du Groenland (GRIP): oscillations de Dansgaard-Oeschger

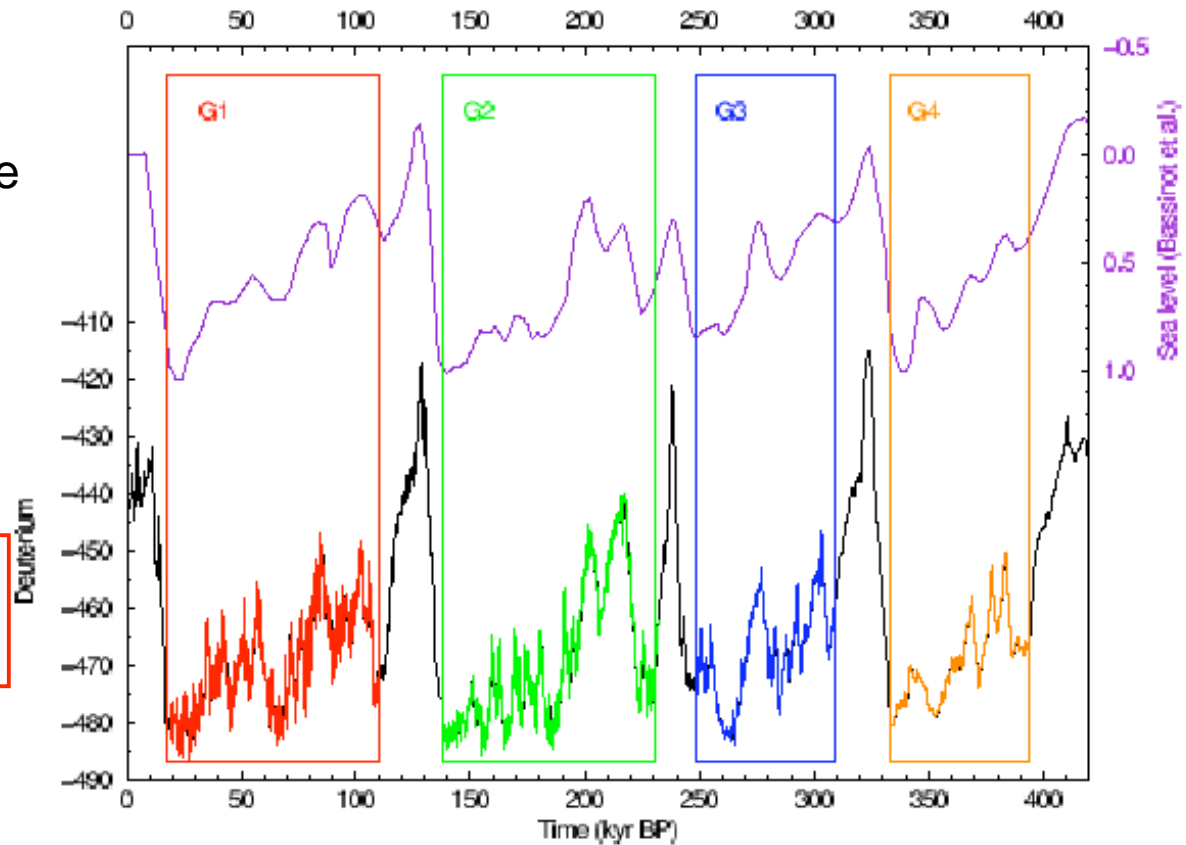
Cycles apparents de 5 à 7 kyr pour les HEs et de 1.3 à 1.7 kyr pour les DOs.

# Variabilité en âge glaciaire

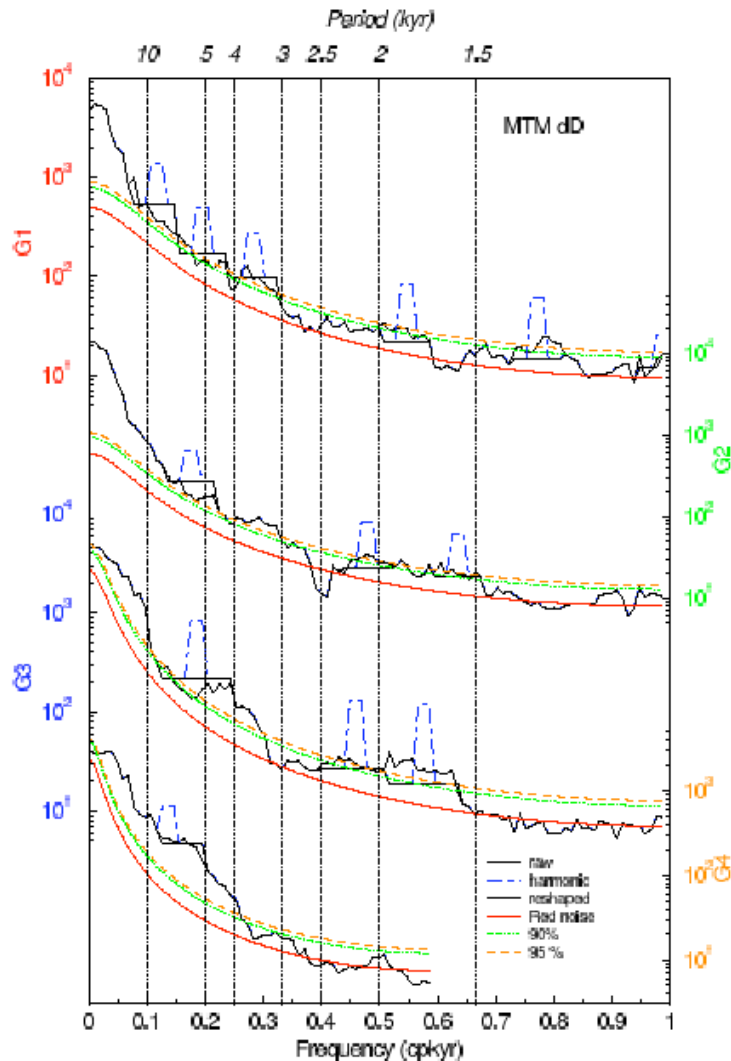
Les enregistrements à haute résolution de l'hémisphère nord témoignent de cycles proches de 5-7 kyr (Heinrich) et ~1.5kyr (Dansgaard-Oeschger), mais ne couvrent que le dernier âge glaciaire.

Le forage de Vostok compte 4 cycles glaciaires

Ont-ils des caractères de variabilité communes?



# Variabilité en âge glaciaire



Spectres des 4 âges glaciaires

Fréquences similaires à celles observées en Atlantique nord pour le dernier âge glaciaire

Généralité de cycles ~5 kyr et ~1.5kyr dans le forage de Vostok.

Grâce à cette approche, on peut estimer que la cause de la variabilité glaciaire est due à l'instabilité des calottes de glace.

# Références

- M. Ghil and S. Childress, *Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics, Dynamo Theory and Climate Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1987
- P. Manneville, *Structure Dissipatives, Chaos et Turbulence*, Aléa Saclay, Gif-sur-Yvette, 1991
- S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, New York, 1990
- <http://www-rocq.inria.fr/scilab/>
- <http://www.r-project.org/>
- Présentation disponible sur <http://www.ipsl.jussieu.fr/~yppsce/courses>

# Dimension de Hausdorff

Soit un ensemble de points dans un espace à  $p$  dimensions. On cherche à le recouvrir par des hypercubes de côté  $\varepsilon$ . Soit  $N(\varepsilon)$  le nombre minimal de cubes nécessaires. La dimension « fractale » (de Hausdorff) de l'ensemble est:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

- Pour un point:  $N(\varepsilon)=1$  donc  $D=0$
- Pour un segment de longueur  $L$ :  $N(\varepsilon)=L/\varepsilon$  donc  $D=1$
- Pour une surface  $S$ :  $N(\varepsilon)=S/\varepsilon^2$  donc  $D=2$
- ...
- Pour un **ensemble de Cantor**:  $\varepsilon=(1/3)^m$ ,  $N(\varepsilon)=2^m$  donc  $D=\log(2)/\log(3)$



# Evénements de Heinrich

