

Modélisation du Climat et Statistiques (TD 1)

Analyse(s) de séries temporelles

Pascal Yiou

LSCE, Gif-sur-Yvette

Quelques Méthodes d'Analyse Spectrale

Le MTM-SST Toolkit

(www.atmos.ucla.edu/tcd/spectra)

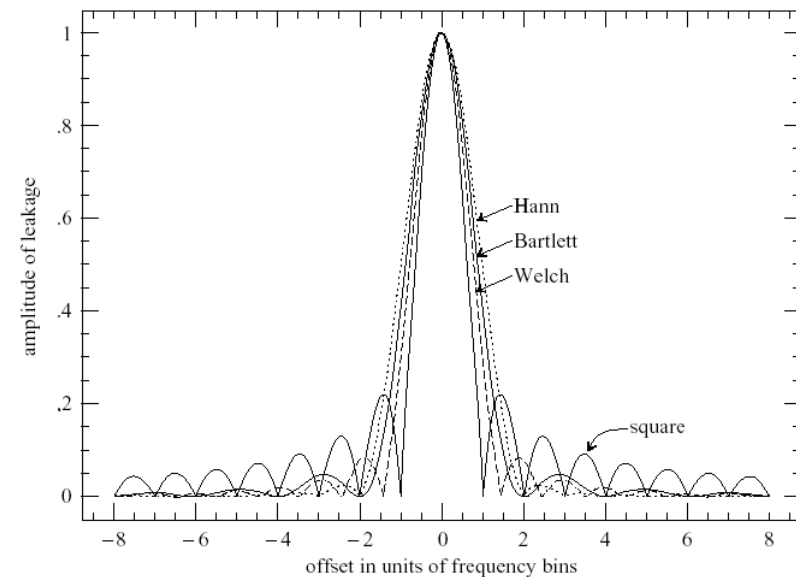
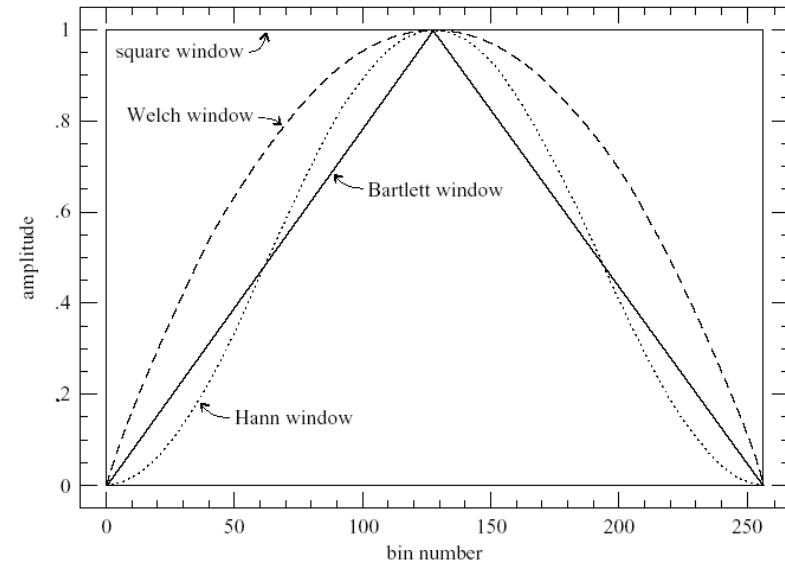
- Blackman-Tukey
- Multi-Taper Method
- Singular Spectrum Analysis

Résolution et « fuites » de l'estimateur spectral

La taille finie de la série temporelle a pour effet de multiplier la série par une fonction caractéristique: convolution des deux transformées de Fourier!

Ne pas utiliser de « fenêtre », c'est choisir une fenêtre carrée.

C'est un mauvais choix !



Méthode de Blackman et Tukey (BT: 1958)

La variance du périodogramme proportionnelle à N , le nombre de points dans la série temporelle.

BT: partant du **corrélogramme**, pondérer les hautes auto-corrélations (i.e., les hautes fréquences) par des poids $w_m(t)$ (ou *fenêtres*):

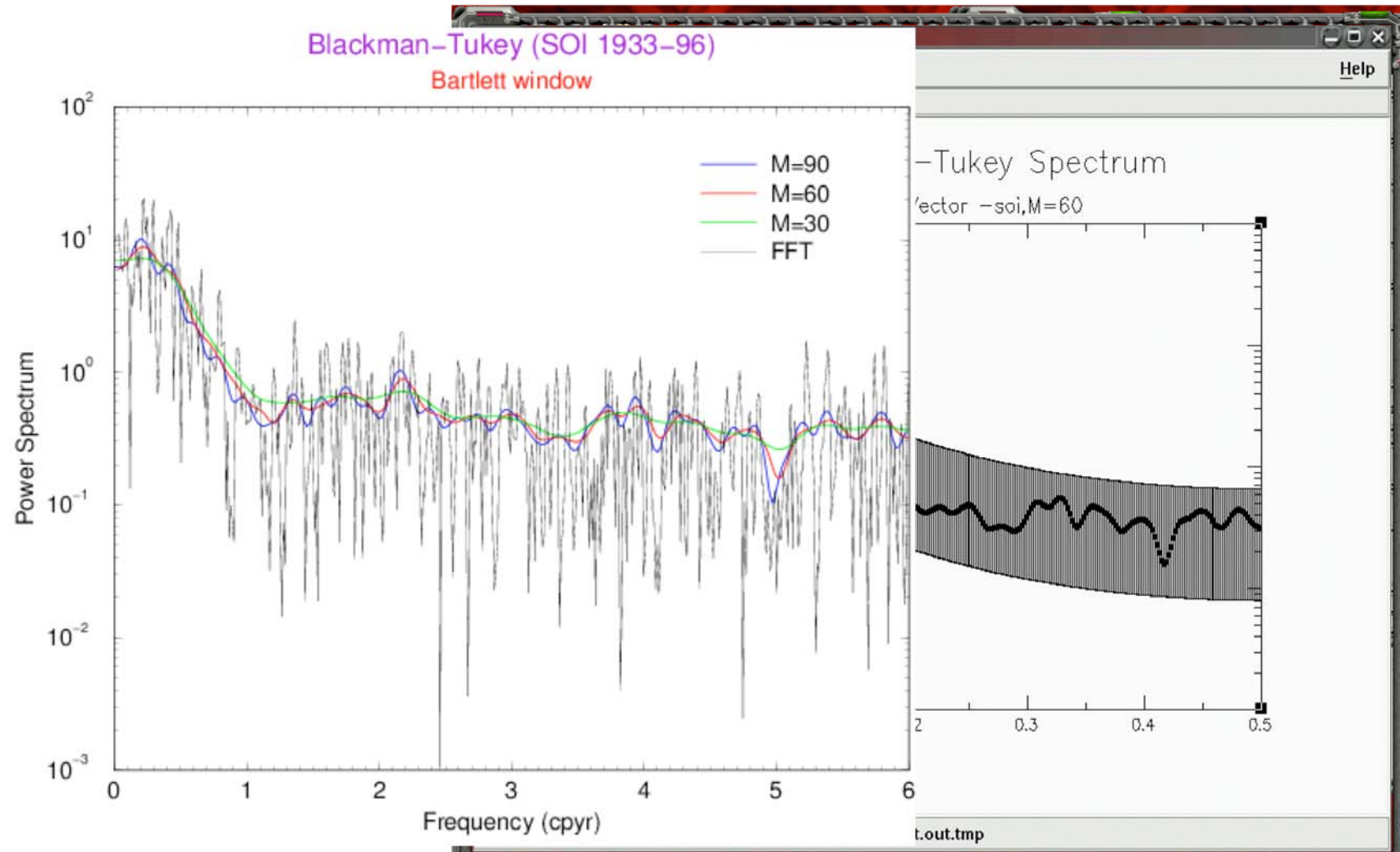
$$\tilde{P}_X^{(2)}(f) = \sum_{t=-(M-1)}^{M-1} w_m(t) C_X(t) e^{-i2\pi ft}$$

La méthode de BT consiste à choisir $w_m(t)$ et l'ordre d'AC maximum $M < N$ sur lequel la fenêtre agit ("*window carpentry, window opening and closing*")

Propriétés de la méthode BT

- Estimation efficace des parties *continues* du spectre à cause du lissage,
- Rapide à calculer,
- Pas très utile pour les parties *discrètes* comme les pics en fréquence (médiocre résolution),
- Il faut choisir (**de manière expérimentale!**) l'ordre d'autocorrélation maximum dans l'estimation du corrélogramme,
- Charpente heuristique (et non optimale) des fenêtres, typiquement, des "triangles" ou des "cosinus".

Fonctionnement de BT



Réduction de la variance de l'estimateur, mais perte de résolution!

Multi Taper Method (Thomson, 1982)

Calcul de K estimations statistiquement *indépendantes* du **périodogramme** à partir de fenêtres bien choisies ($w_k(t)$, minimisant des "fuites" spectrales, Slepian 1978).

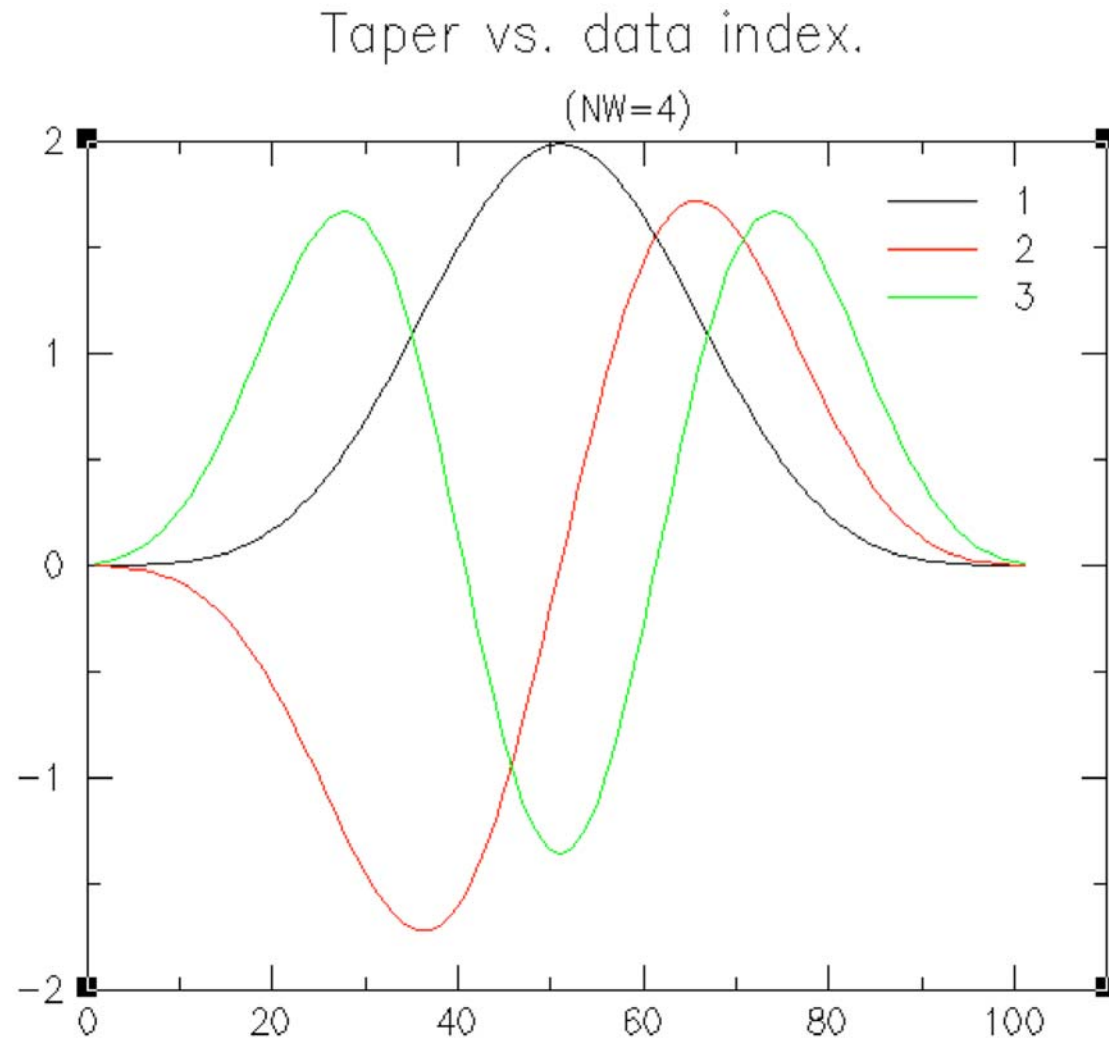
$$P_X^{(k)}(f) = \left| \sum_{t=1}^N w_k(t) X(t) e^{-i2\pi ft} \right|^2, k = 1 \dots K$$

L'estimation multi-fenêtre est une moyenne pondérée des K spectres:

$$\tilde{P}_X(f) = \frac{\sum_{k=1}^K \lambda_k P_X^{(k)}(f)}{\sum_{k=1}^K \lambda_k}$$

L'estimateur ainsi obtenu possède une *haute* résolution et une *faible* variance.

Un exemple de fenêtre de Slepian:



Les tests MTM

Analyse harmonique: estimer les composantes périodiques et leur amplitude

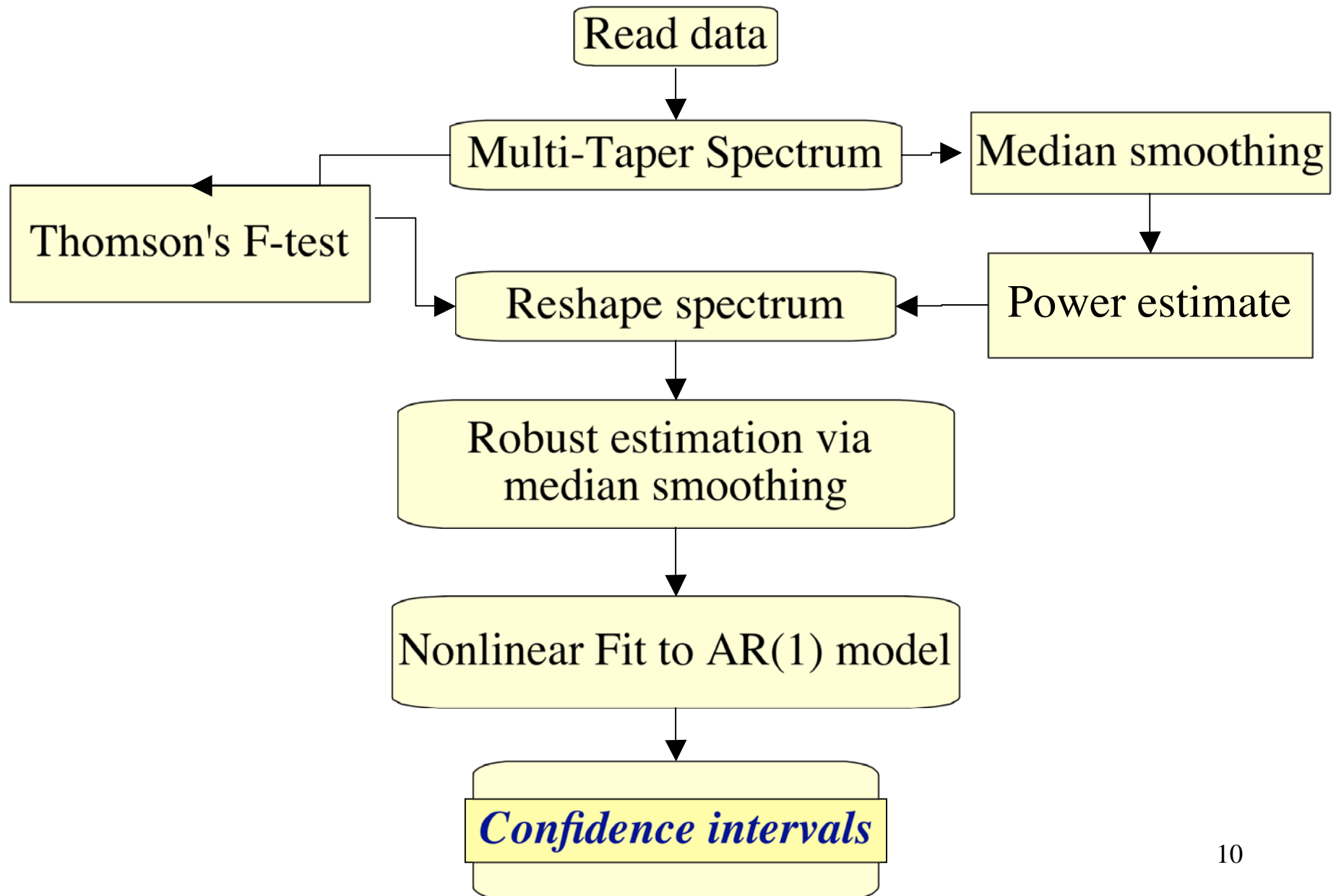
$$X(t) = \mu e^{i2\pi f_0 t} + b(t)$$

On peut estimer par moindres carrés les paramètres μ et f_0 de ce modèle et tester sa pertinence par rapport à une hypothèse de bruit blanc (test de Fisher-Snedecor).

Ceci permet de raffiner l'estimation spectrale en dehors des "pics" harmoniques.

Test de bruit rouge (Mann et Lees, 1996): lissage médian du spectre afin d'obtenir le spectre d'un bruit rouge "équivalent" aux données (même variance et autocovariance) et détection des *outliers anharmoniques*.

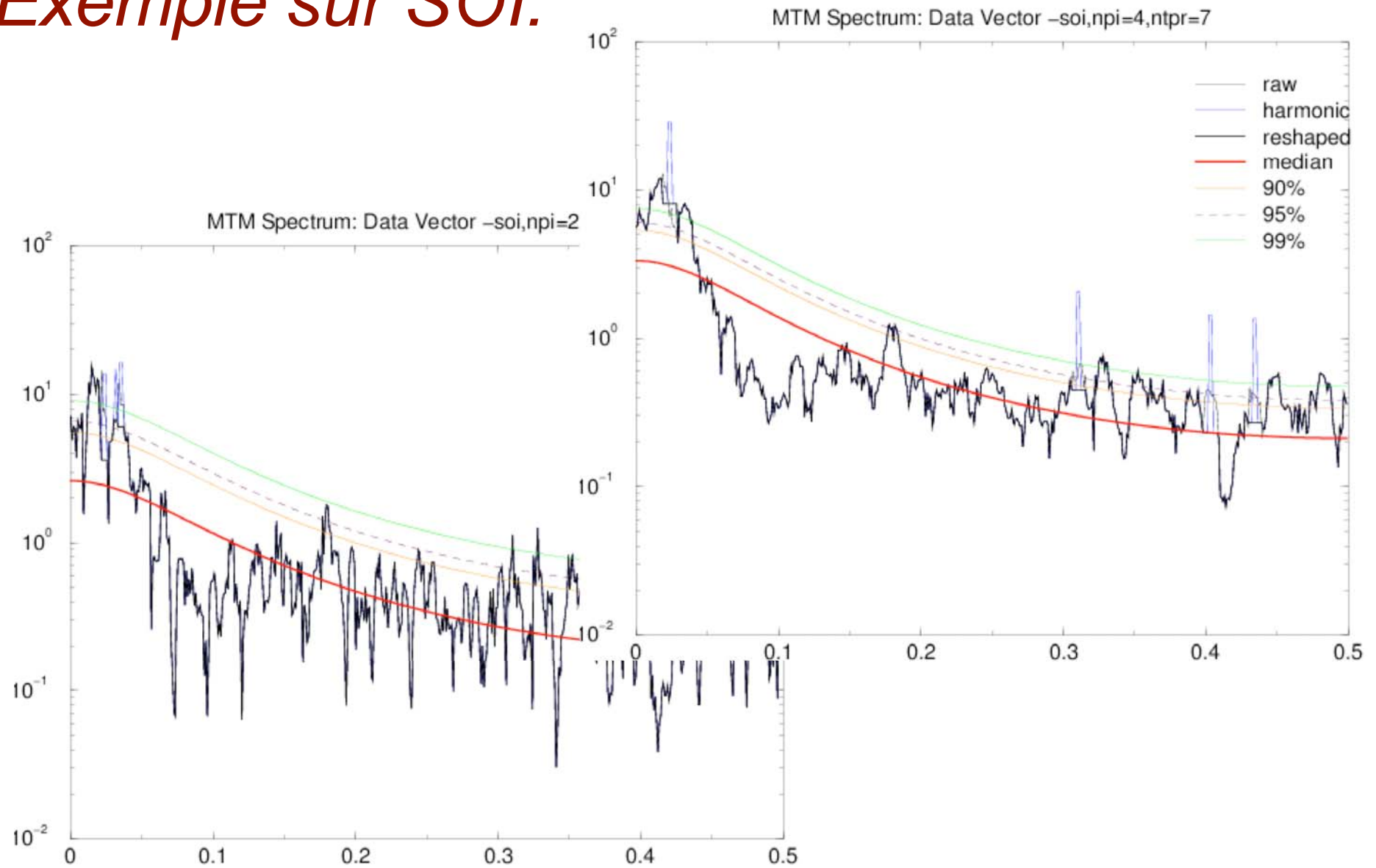
Procédure MTM (Mann et Lees, 1996)



Quelques propriétés de la MTM

- Bonnes performances pour analyser les composantes périodiques quand elles existent
- Un signal aléatoire peut générer autant de pics qu'il veut avec le test d'analyse harmonique
- Deux manières de tester le spectre (composantes harmoniques et bruit rouge/blanc)

Exemple sur SOI:

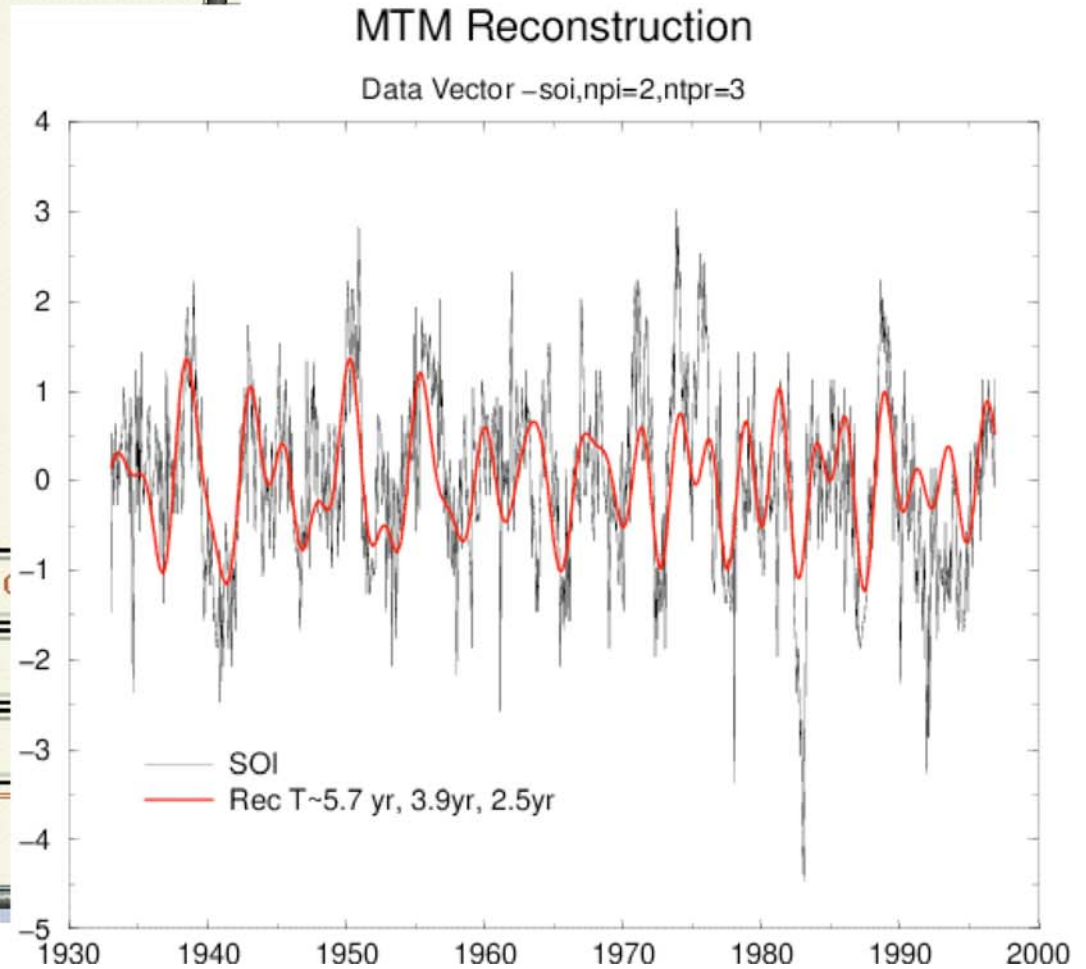
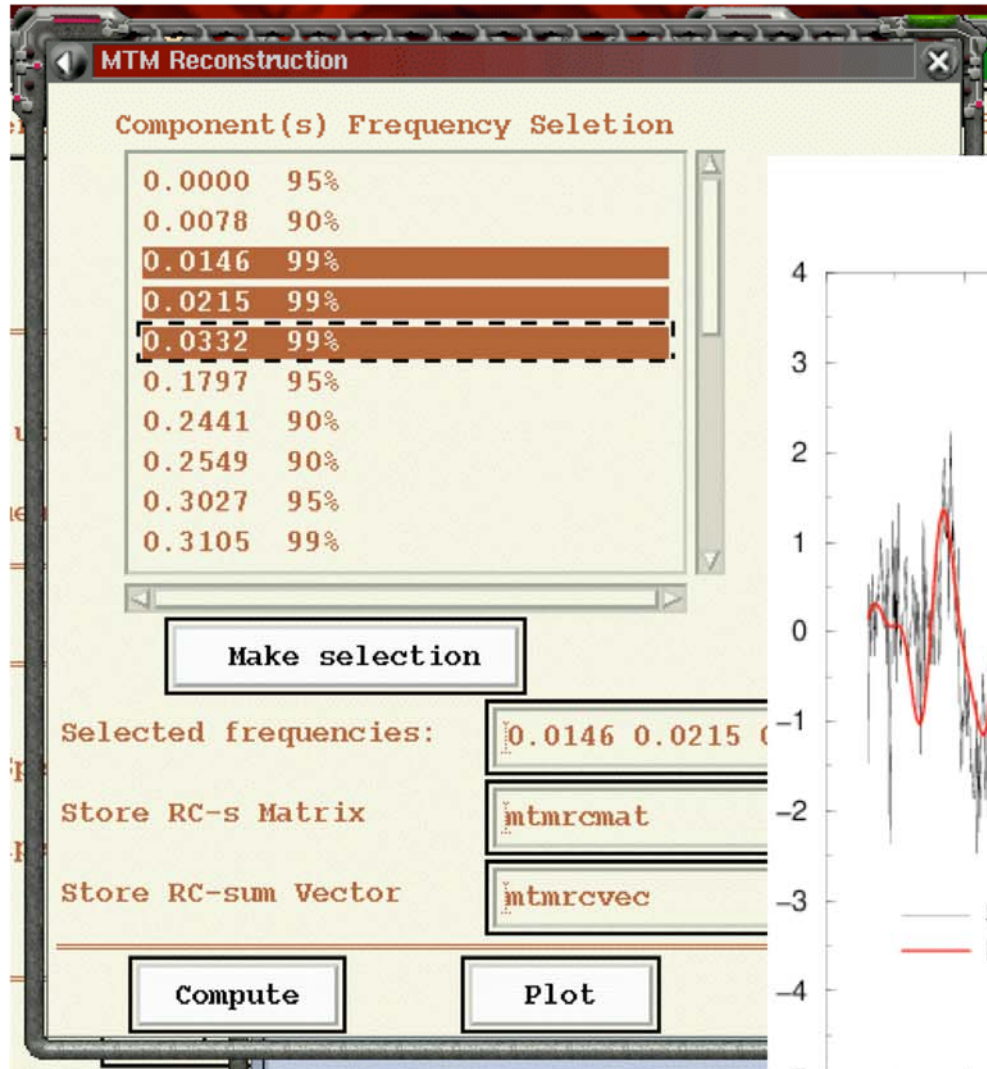


Reconstruction et filtrage MTM

- Une fois que des "pics" ont été détectés on peut vouloir reconstruire un *signal* correspondant ou bien filtrer la série de départ autour de cette bande de fréquence.
- La MTM prévoit une procédure de reconstruction à partir d'un pic (même anharmonique) qui tient compte de la largeur fréquentielle de ce pic spectral.

$$\tilde{X}(n\Delta t) = \Re\left\{A_n e^{-2\pi i f_0 n\Delta t}\right\}.$$

MTM Reconstruction



Analyse spectrale singulière (SSA)

(Broomhead et King, Physica D, 1986)

$X(t)$, $t=1\dots N$: série temporelle d'une observable du système

M : dimension de *plongement*

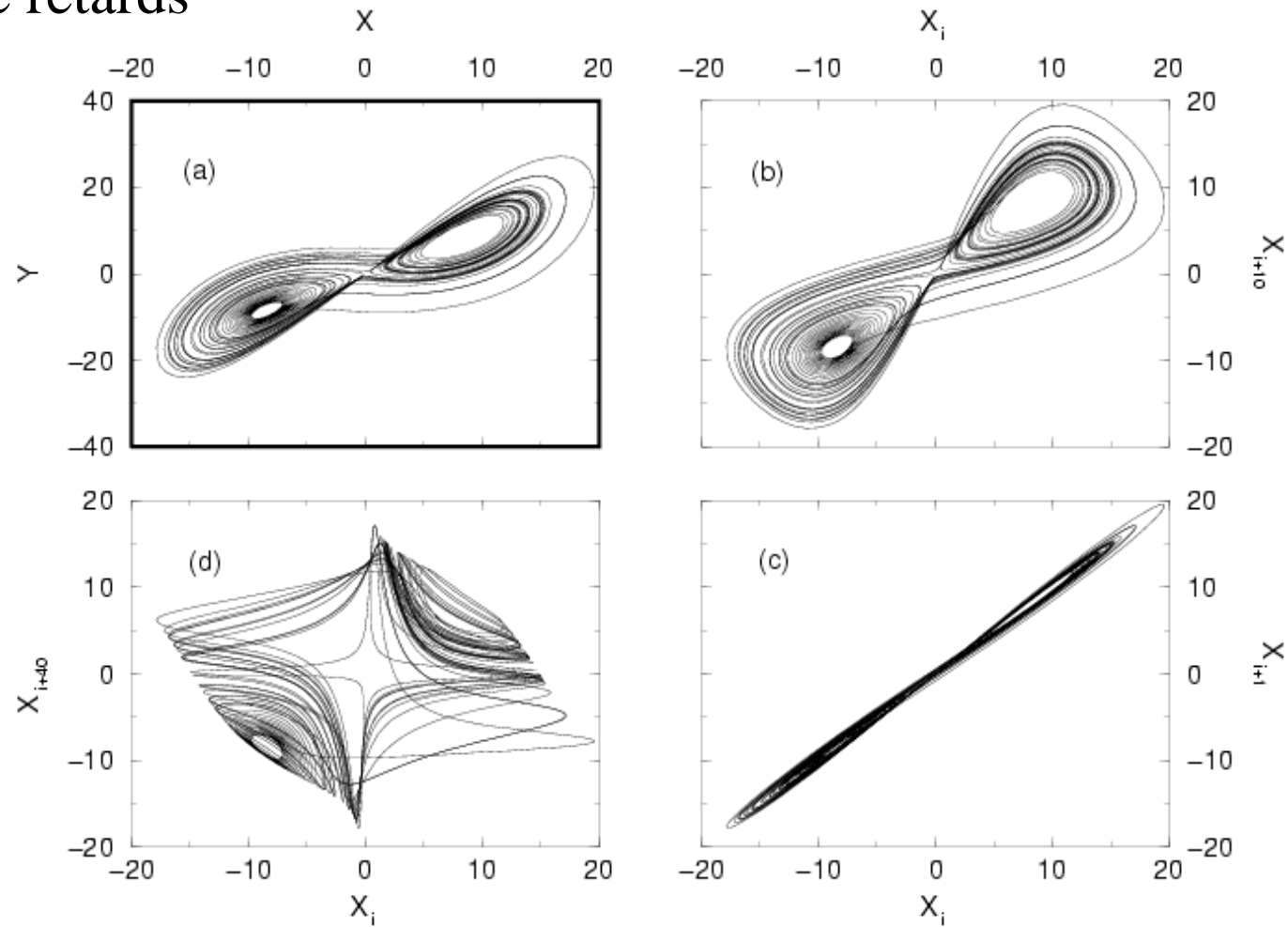
Trajectoire de X en dimension M :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} X(1) & \cdots & X(N-M+1) \\ \vdots & & \vdots \\ X(M) & \cdots & X(N) \end{pmatrix}$$

Trajectoire visible en dimension $M \leq 3$, mais « plat de spaghetti »
sinon!

Motivation de la SSA

Théorème de Takens (1981) de reconstruction d'attracteur et méthode de retards



Calcul de la matrice C_{Ξ} de covariance de Ξ (*moments d'inertie*) et de ses éléments propres...

Directions principales de Ξ :

$$C_{\Xi} \rho_k = \lambda_k \rho_k$$

Vecteurs propres (*empirical orthogonal functions, EOFs*)

Variance du mode k

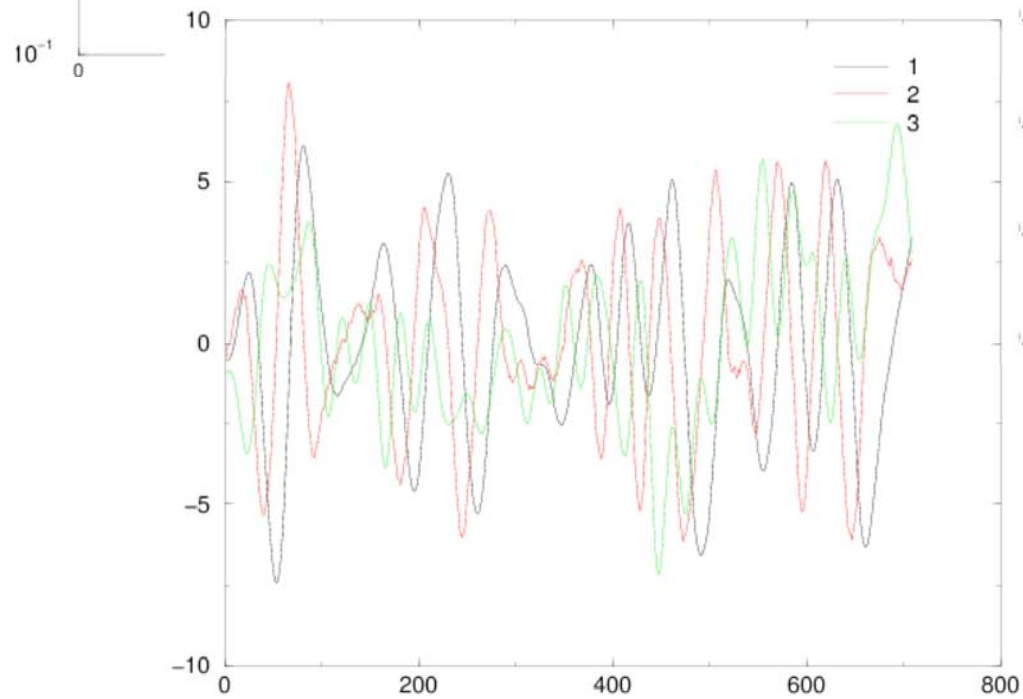
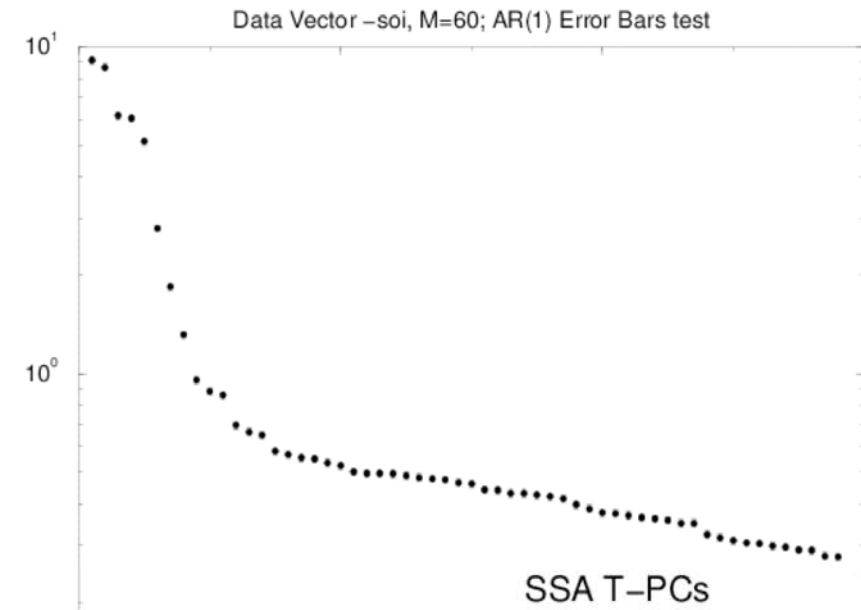
Composantes principales (PC): Projections de X sur les EOFs

$$X_k(t) = \sum_{j=1}^M X(t+j) \rho_k(j)$$

Reconstruction à partir d'un sous ensemble K de composantes (filtrage):

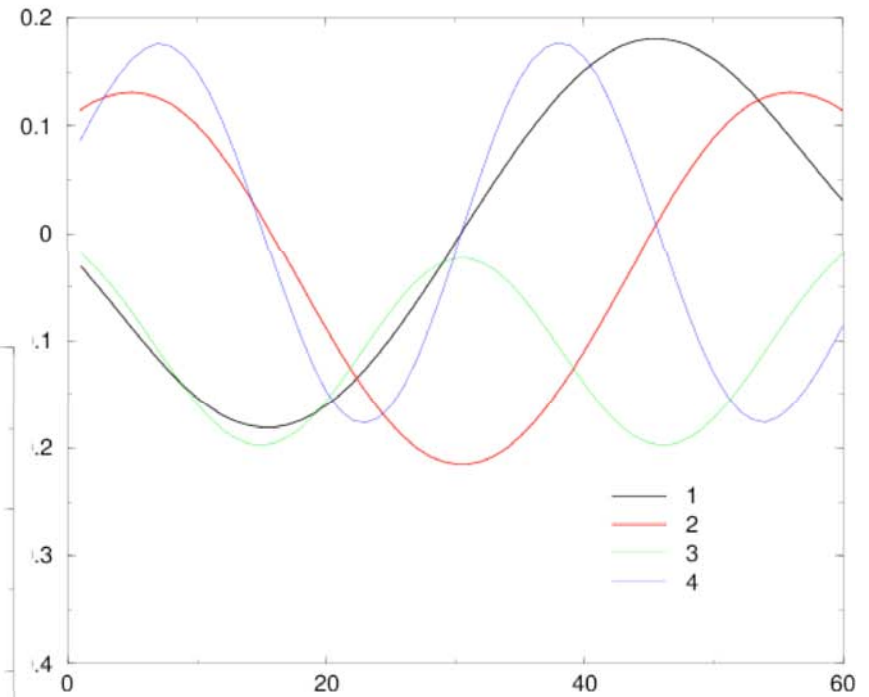
$$\hat{X}_K(t) = \frac{1}{A} \sum_{k \in K} \sum_{j=1}^M \rho_k(j) X_k(t-j), \quad M \leq t \leq N - M + 1$$

SSA



Valeurs & vecteurs propres:

SSA T-EOFS



Monte Carlo SSA

(Allen et Smith, *J. Clim.*, 1995)

But: déterminer si on peut rejeter l'hypothèse nulle de bruit rouge en comparant ses EOFs/valeurs propres avec celles des données.

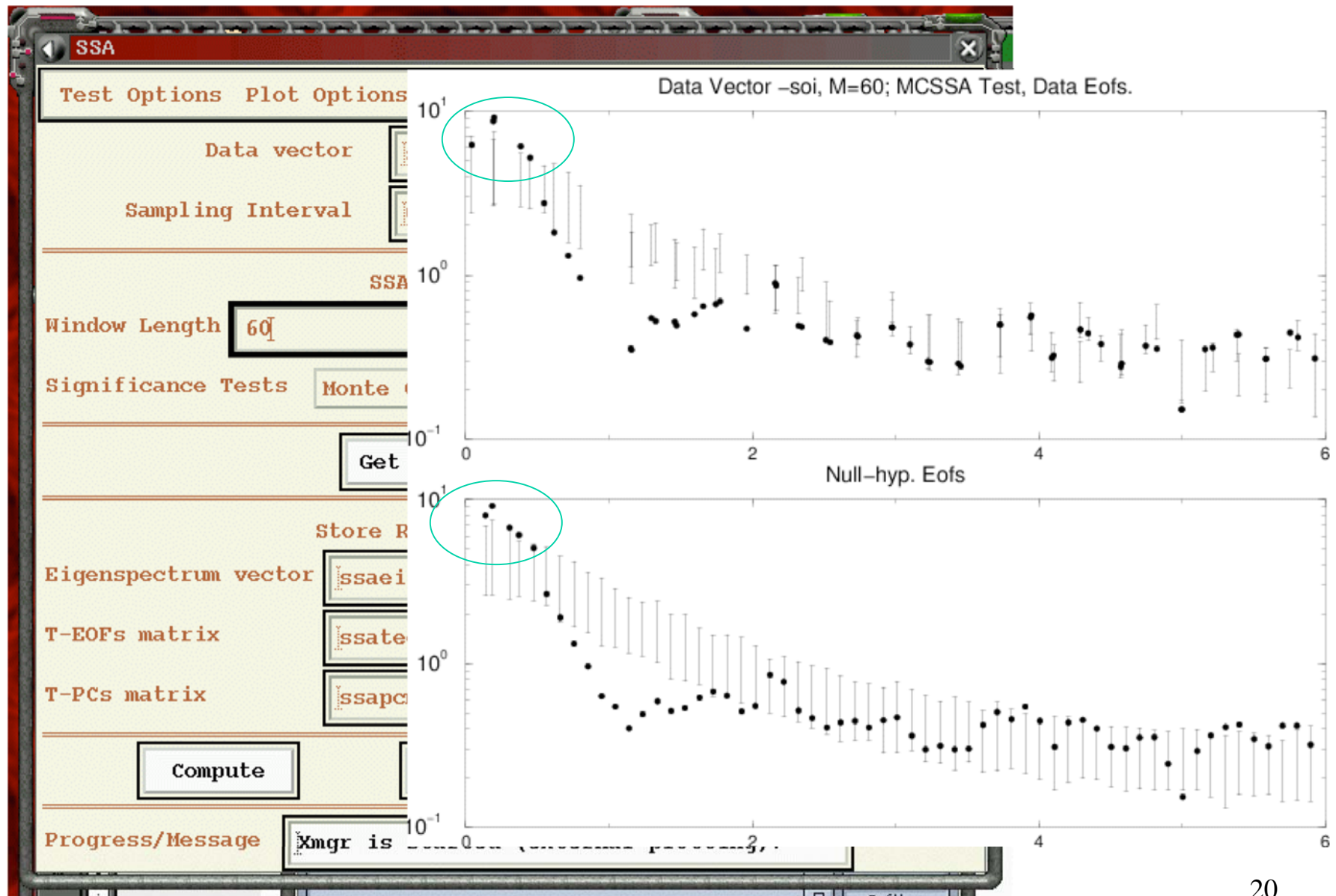
Procédure:

- On estime les paramètres de bruit rouge de même variance et autocovariance que la série observée $X(t)$
- On compare la pdf de la projection de la matrice de covariance du bruit sur les EOFs des données:

$$\Lambda_B = R_X^t \underbrace{C_R}_{\text{Covar. bruit rouge}} \underbrace{R_X}_{\text{EOFs données}}$$

L'hypothèse nulle est rejetée à partir de la pdf de Λ_B .

Monte Carlo SSA: le test de bruit rouge

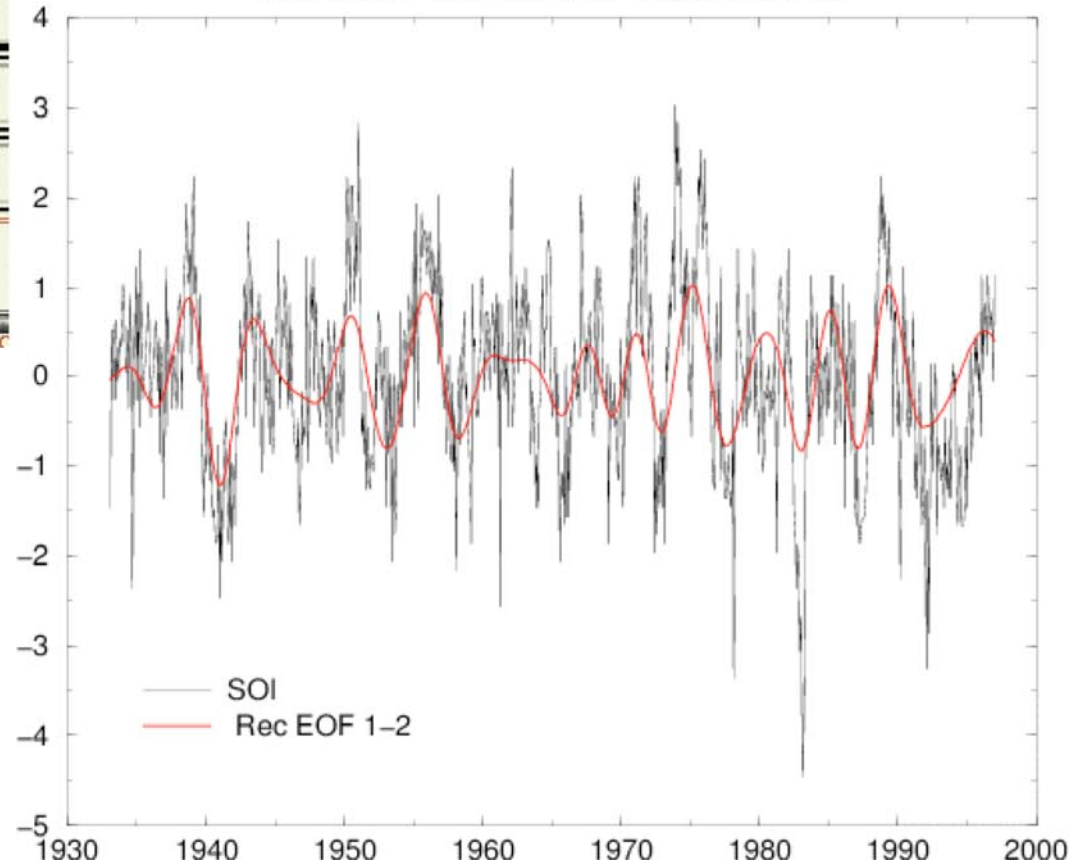


Reconstruire des composantes pertinentes



SSA Reconstruction

Data Vector -soi, RC Vector -ssarcvec, M=60



Au travail!

- Analyses spectrales d'une série d'indice NAO en hiver
 - Prétraitement en R
- Analyses d'une série de température d'été depuis 1370

Références

- C. Chatfield, *The Analysis of Time Series: An Introduction*, Chapman and Hall, New York, 1984
- M. Ghil et al., Advanced spectral methods for climatic time series, *Rev. Geophys.*, 40, doi:10.1029/2001RG000092, 2002
- D. B. Percival et A. T. Walden, *Spectral Analysis for Physical Applications*, Cambridge University Press, 1993
- H. von Storch et F. W. Zwiers, *Statistical Analysis in Climate Research*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999
- D. S. Wilks, *Statistical Methods in the Atmospheric Sciences*, Academic Press, San Diego, 1995
- <http://www.ipsl.jussieu.fr/CLIMSTAT/>
- <http://www.atmos.ucla.edu/tcd/ssa>
- <http://www.r-project.org>